Introduction to Nonstandard Analysis

2009 年 11 月 15 日　田中 良樹
東京大学理学部物理学科 3 年

1　Introduction

超準解析（Nonstandard Analysis）という言葉をご存知ですか？これは数学における手法の 1 つで，そこでは無限大や無限小を“ 合法的に ”扱い，実数上の解析や位相空間論などを展開することができます．簡単な例を挙げると，数列の極限の定義として，ε とか n_0 とか出てくる定義を大学 1 年生の時に習いますが，超準解析では,

$$\text{任意の無限大自然数}\ \nu\ \text{に対して，}a_\nu - \alpha\ \text{が無限小のとき，}\{a_n\}\ \text{は}\ \alpha\ \text{に収束する}$$

という直感的な表現をすることができます.（もちろんこれが standard な定義と同値であることは示さねばならぬことです.）このように standard なことを nonstandard に言い換えていくことで，より直感的に理解できたり，いろいろな定理たちをより簡単に示すことができます．また歴史的にも，先に nonstandard な手法で証明された定理なんてものもあります.

私はこの超準解析を大学 1 年生の時に，河東泰之先生（東京大学数理科学研究科教授）の全学ゼミナールで知り，その後高々2 年ほどですが，いくつかの本を読みながら続けてきました．そういうわけで，今回これを紹介することになりました．このような機会を与えてくれた井上君に，この場を借りて感謝します.

さて，このテキストの Introduction 以降の構成は以下のようになるはずだったのですが，一応ページ数は 10 ページが目安ということなので，ここでは **2** だけにします．そして当日 **3** と **4** について話をしようと思います.

2. 超準解析の基礎

3. 実数と超実数

4. 位相と超準解析

また，参考文献として今までに読んだ or 今読んでいる本を挙げておくので，興味をもたれた方は読んでみてください.（当日もたぶん持っていきます.）

では，最後にいくつかこのテキストで用いる記号についてまとめ，Introduction を終わりにします.

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{P}(X) &:= \{A | A \subseteq X\} \qquad \text{power set of } X \\
< a, b > &:= \{\{x\}, \{x, y\}\} \qquad \text{ordered pair of } x \text{ and } y \\
< x_1, \cdots x_n > &:= << x_1, \cdots x_{n-1} >, x_n > \qquad \text{ordered } n\text{-tuple} \\
X \times Y &:= \{< x, y > \mid x \in X,\ y \in Y\} \\
r\lceil s &:= \begin{cases} t & (\text{if there is one and only one t for which } < s, t > \in r\,) \\ \phi & (\text{otherwise}) \end{cases} \\
g[C] &: \ \text{image of C under a mapping } g \\
\mathrm{dom}(g) &: \ \text{domain of a mapping (or relation) } g
\end{aligned}
$$

ただし，関係 (relation) や写像 (mappaing) もここでは集合とみなしている．まず，$r \subseteq A \times B$ であるとき，r は relation であるという．そして $< x, y > \in r$ のとき，この r という関係が x と y の間に成り立つとみなす．また，f が A から B への写像 (mapping) であるとは，以下の場合をいう.

$$f \subseteq A \times B, \quad \text{and for each } x \in A \text{ there is exactly one } y \in B \text{ such that } < x, y > \in f$$

2　超準解析の基礎

2.1　FILTER

まず，超準解析の構成に必要な，filter の定義と filter に関するいくつかの性質を見ていこう．

Definition 2.1.1　I を空でない集合とする．$F \subseteq \mathfrak{P}(I)$ に対して以下の 3 つが成り立つとき，F は I 上の filter であるという．

1. $A \in F,\ A \subseteq B \quad \longrightarrow \quad B \in F,$
2. $A, B \in F \quad \longrightarrow \quad A \cap B \in F,$
3. $\phi \notin F,\ I \in F$

Definition 2.1.2　I 上の filter F が ultrafilter であるとは，さらに次が成り立つときを言う．

$$F \subseteq F_1,\ F_1 \text{ is a filter} \quad \longrightarrow \quad F = F_1$$

[問] 例として，以下の F が filter であることを確認せよ．また，これは ultrafilter であるか否か．

1. I を無限集合とする．I の有限部分集合の補集合全体 F
2. I の元を 1 つとり，これを x とする．$F = \{A \subseteq I | x \in A\}$

そして，ultrafilter の存在を示すのが，次の定理である．

Theorem 2.1.3　F_0 を I 上の filter とする．このとき，I 上の ultrafilter F で $F \supseteq F_0$ なるものが存在する．

[proof]　$\mathfrak{G} = \{G \supseteq F_0 | G$ は I 上の filter$\}$ とおく．これは $\subseteq$ について帰納的順序集合である（すなわち，任意の全順序部分集合が上界を持つ）ということが filter の定義を用いれば示せる．よって Zorn's Lemma から $\mathfrak{G}$ は極大元を持ち，これが定理の主張する ultrafilter F である.（証明終わり）

Definition 2.1.4　$G \subseteq \mathfrak{P}(I)$ が以下を満たすとき，この G は filter basis であるという．

1. $\phi \notin G$
2. $G \neq \phi$
3. $A, B \in G \quad \longrightarrow \quad A \cap B \in G$

Theorem 2.1.5　G を I 上の filter basis とする．このとき，$G \subseteq F$ をみたす I 上の filter F が存在する．

[proof]　$F = \{A \subseteq I | A \supseteq C \text{ for some } C \in G\}$ とする．この F は明らかに G を含むので，あとはこの F が filter であることを filter の定義に戻って示そう．(1) $A \in F, A \subseteq B$ とすると，F の定義から $C \subseteq A$ なる G の元 C があるので，$B \supseteq A \supseteq C$ となり，$B \in F$ を得る．(2) $A, B \in F$ とする．すると $C_1, C_2 \in G, C_1 \subseteq A, C_2 \subseteq B$ となる C_1, C_2 が存在し，$C_1 \cap C_2 \in G$ と $A \cap B \supseteq C_1 \cap C_2$ より，$A \cap B \in F$ を得る．(3) $G \neq \phi$ より，ある G の元 C が存在して，$C \subseteq I$ より，$I \in F$．また，$\phi \notin G$ より，$\phi \supseteq C$ となる G の元 C は存在しない．よって $\phi \notin I$．(証明終わり)

上述の 2 つの定理より，次の系を得る．

Corollary 2.1.6　G を I 上の filter basis とすると，$G \subseteq F$ をみたす I 上の ultrafilter F が存在する．

最後に ultrafilter の重要な性質を挙げてこの節を終わりとする．

Theorem 2.1.7 　I 上の filter F に対して，次の 4 条件は同値である．

1. F は ultrafilter
2. $A \subseteq I \quad \longrightarrow \quad A \in F$ or $A^c \in F$
3. $A \cup B \in F \quad \longrightarrow \quad A \in F$ or $B \in F$
4. $A_1 \cup \cdots \cup A_n \in F \quad \longrightarrow \quad A_j \in F$ for some j.

[問] この定理を示せ．

2.2 SUPERSTRUCTURE and UNIVERSE

まず，superstructure と呼ばれる集合を構成する．そのためにまず，individuals の集合 S を 1 つとる．(すなわち，S の元は集合ではない．) 一般的な話をするために S としているが，例えば超実数を考えるのだったら S は $\mathbb{R}$ とする．

Definition 2.2.1 　以下で定義される $\hat{S}$ を superstructure with individuals S という．

$$\begin{aligned} S_0 &= S \\ S_{i+1} &= S_i \cup \mathfrak{P}(S_i) \\ \hat{S} &= \bigcup_{i \in \mathbb{N}} S_i \end{aligned}$$

S の元は individual，$\hat{S} - S$ の元は集合である．

Definition 2.2.2 　$A \subseteq \hat{S}$ が $\hat{S}$ において transitive であるとは，次が成り立つときをいう．

$$x \in A - S \quad \text{and} \quad y \in x \quad \longrightarrow \quad y \in A$$

Definition 2.2.1 のように $\hat{S}$ を定義すると，$\hat{S}$ は数学に必要なほぼ全ての集合（$\leftarrow$ 写像や関係も集合とみなす）を含む．証明は簡単なため省略するが，以下の性質を示すことができる．

Theorem 2.2.3 　$\hat{S}$ に関して，以下の性質が成り立つ．

1. $x \in \hat{S} - S \quad \longrightarrow \quad \mathfrak{P}(x) \in \hat{S}$
2. $x \in \hat{S} - S, y \subseteq x \quad \longrightarrow \quad y \in \hat{S}$
3. $x \in \hat{S} - S, x \cap S = \phi \quad \longrightarrow \quad y = \bigcup_{z \in x} z \in \hat{S}$
4. $a_1, \cdots a_k \in \hat{S} \quad \longrightarrow \quad < a_1, \cdots a_k > \in \hat{S} \quad \text{and} \quad \{a_1, \cdots a_k\} \in \hat{S}$
5. $x_1, \cdots x_k \in \hat{S} - S \quad \longrightarrow \quad x_1 \cup \cdots \cup x_k \in \hat{S}$
6. $X, Y \in \hat{S} - S \quad \longrightarrow \quad X \times Y \in \hat{S}$
7. $X, Y \in \hat{S} - S$，$f : X \to Y$ とすると，以下が成り立つ．
   (a) $f \in \hat{S}$
   (b) $a \in X \quad \longrightarrow \quad f(a) \in \hat{S}$
   (c) $A \subseteq X \quad \longrightarrow \quad f[A] \in \hat{S}$

8. $J, V \in \hat{S} - S$, 各 $j \in J$ に対して $X_j \in V$ とする．このとき，

   (a) $\bigcup_{j \in J} X_j \in \hat{S}$

   (b) $\prod_{j \in J} X_j \in \hat{S}$.

9. $r \in \hat{S}, s \in \hat{S} \quad \longrightarrow \quad r \lceil s \in \hat{S}$

Definition 2.2.4 $\hat{S}$ の部分集合 U が以下を満たすとき，U を universe (with individuals S) という．

1. $\phi \in U$
2. $S \subseteq U$
3. $x,\, y \in U \quad \longrightarrow \quad \{x,\, y\} \in U$
4. U is transitive in $\hat{S}$.

この定義から，次の定理が成り立つ．

Theorem 2.2.5

$$r, s \in U \quad \longrightarrow \quad < r, s > \in U \quad \text{and} \quad r \lceil s \in U$$

[proof] transitivity と，$< r, s >= \{\{r\}, \{r, s\}\} = \{\{r, r\}, \{r, s\}\}$, $r \lceil s = \phi$ or $< s, r \lceil s > \in r$ より示せる．

また，$\hat{S}$ 自身も universe になることが定義から明らかで，これを standard universe という．これから先は，ultrfilter を利用して，nonstandard universe と呼ばれる別の universe を構成する．そこで，I を空でない集合，F を I 上の ultrafilter としよう．

まず，各 $n \in \mathbb{N}$ に対して Z_n を，次を満たす f 全体の集合として定義する．

$$f : I \to \hat{S} \quad \text{and} \quad \underline{\{d \in I | f_d \in S_n\} \in F}$$

また，下線部のような主張は今後,「I 上のほとんどの d で成り立つ」という意味を込めて $f_d \in S_n$ a.e. と略記することにする.（a.e. は almost everywhere の頭文字）

そして今定義した Z_n から，

$$Z = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} Z_n$$

と定義する．standard universe $\hat{S}$ は定数関数によって自然に Z に埋め込むことができる．というのは $r \in \hat{S}$ に対して，$r_d = r$ (for all $d \in I$) という定数関数 (これは Z の元である) を対応させればよいからである．

また，$f, g \in Z_0$ に対して $f_d = g_d$ a.e. であるとき，$f \sim g$ と定める．すると $\sim$ は Z_0 上の同値関係になるので，Z_0 を $\sim$ で割って，$W = Z_0/\sim$, f の属する同値類を $\bar{f}$ と書くことにする.（つまり，$\bar{f} = \{g \in Z_0 | g \sim f\}$, $W = \{\bar{f} | f \in Z_0\}$ ということ.）このように W を定義したとき，$x, y \in S, x \neq y$ ならば明らかに $\bar{x} \neq \bar{y}$ である．よって $x \in S$ に対して $\bar{x} \in W$ を x と同一視することができ，S を W に埋め込んで $S \subseteq W$ とできる．すると $x \in S$ に対しては $\bar{x} = x$ である.（W の元の中に，S の元でないものがあるかどうかは，I や F のとり方による．例えば $I = \mathbb{N}, F =$ ($\mathbb{N}$ の有限部分集合の補集合全体という filter を含む ultrafilter) とすると，$f_d = d$ (for all $d \in \mathbb{N}$) に対する $\bar{f} \in W$ は，S の元ではない.）

次に，$\hat{W}$ を，superstructure with individuals W とする．そしてこの中に，nonstandard universe $\tilde{W}$ を構成しよう．先ほど $f \in Z_0$ に対して $\bar{f} \in W_0$ を定義した．そこですでに Z_i までの f に対し $\bar{f} \in W_i$ が定義されているとして，$f \in Z_{i+1} - Z_i$ に対して $\bar{f}$ を，以下を満たす $\bar{g}$ 全体の集合と定める．

$$g \in Z_i \quad \text{and} \quad g_d \in f_d \text{ a.e.}$$

すると $\bar{f} \in W_{i+1}$ なので，これによって帰納的に全ての Z の元に対して $\bar{f} \in \hat{W}$ が定義され，$f \in Z_i$ ならば $\bar{f} \in W_i$ である．そして最後に $\tilde{W} = \{\bar{f} | f \in Z\}$ とおき，これを nonstandard universe と呼ぶ．(もちろんこれが universe であることは今から示す．) また，単なる呼び方であるが，$\hat{S}$ の元 r によって $\bar{r}$ と書ける $\tilde{W}$ の元を standard element，そうでないものを nonstandard element と呼ぶ．また，$\hat{W}$ の元のうち，$\tilde{W}$ の元であるものは internal，そうでないものは external であるという．

今までに述べてきた定義から，次の定理を得る．

Theorem 2.2.6 $f, g \in Z$ に対して，以下が成り立つ．

1. $\bar{f} \in \bar{g}$ if and only if $f_d \in g_d$ a.e.
2. $\bar{f} = \bar{g}$ if and only if $f_d = g_d$ a.e.

[proof] 上に述べた定義と filter の定義を用いれば，帰納的に示せる．(証明略)

では次に $\tilde{W}$ が universe であることを示そう．

Theorem 2.2.7 $\tilde{W}$ is a universe with individuals W.

[proof] universe の定義に沿って示す．(1)$\phi \in S_1 \subseteq Z_1$ より，$\bar{\phi} \in \tilde{W}$ を考えることができる．これは元を 1 つももたない集合のため，$\bar{\phi} = \phi$. (2)$W \subseteq \tilde{W}$ は明らか．(3) $\bar{x}, \bar{y} \in \tilde{W}$ とする．このとき $h_d = \{x_d, y_d\} \in Z$ なので $\bar{h}$ を考える．まず，$\bar{x}, \bar{y} \in \bar{h}$. またもし，$\bar{k} \in \bar{h}$ とすると，$k_d \in \{x_d, y_d\}$ a.e. であり，すると，ultrafilter の性質 (Theorem 2.1.7) から，$k_d = x_d$ a.e. or $k_d \in y_d$ a.e. となるため，$\bar{k} = \bar{x}$ or $\bar{y}$. 以上より，$\{\bar{x}, \bar{y}\} = \bar{k} \in \tilde{W}$. (4) の transitivity は明らか．(証明終わり)

さらに次の定理も成り立つ．同じような議論が続くので，証明は [問] ということにする．

Theorem 2.2.8 $f, g, h \in Z$ とする．このとき次の 2 つが成り立つ．

1. $\bar{h} =< \bar{f}, \bar{g} >$ if and only if $h_d =< f_d, g_d >$ a.e.
2. $\bar{h} = \bar{f} \lceil \bar{g}$ if and only if $h_d = f_d \lceil g_d$ a.e.

2.3 LANGUAGE

universe U に対して，対応する language $\mathfrak{L}_U$ とは，次の記号たちの集まりである．

1. $=, \in, \neg, \&, \exists, (,), <, >, \lceil, \underline{,}$
2. variables ($x, y, z, \cdots$, x_1, $x_2 \cdots$)
3. constants (constants と U の元の間には 1 対 1 の対応がある．)

そして，$\mathfrak{L}_U$ の記号の有限列を expression といい，そのうち特に意味を持つ term，formula などを次に定義する．以下 U が明らかな場合は $\mathfrak{L}_U$ を単に $\mathfrak{L}$ と書く．

Definition 2.3.1 expression μ が $\mathfrak{L}$ の term であるとは，μ を末項に持つ有限列 $\mu_1, \cdots, \mu_n$ (もちろん $\mu_n = \mu$) が存在して，全ての $i = 1, 2, \cdots n$ に対して以下のいずれかが成り立つ場合．

1. μ_i は variable.
2. μ_i は $\mathfrak{L}$ の constant.
3. $\mu_i = < \mu_j, \mu_k >$ where $j, k < i$ (←この“ $=$ ”は $\mathfrak{L}$ の記号の $=$ という意味ではない．次も同様．)
4. $\mu_i =$ $(\mu_j \lceil \mu_k)$ where $j, k < i$

とくに1つも variable を含まない term を，closed term という．また，term μ が $x_1, \cdots x_k$ という variables を含む場合は，それを明示して，$\mu(x_1, \cdots x_k)$ と書く．このとき $x_1, \cdots x_k$ を全て constants $b_1, \cdots b_k$ で置き換えれば，これは closed term になる．

Definition 2.3.2 expression α が $\mathfrak{L}$ の formula であるとは，α を末項に持つ有限列 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ (もちろん $\alpha_n = \alpha$) が存在して，全ての $i = 1, 2, \cdots n$ に対して以下のいずれかが成り立つ場合と定義する．

1. $\alpha_i = (\mu = \nu)$ where μ and ν are terms of $\mathfrak{L}$
2. $\alpha_i = (\mu \in \nu)$ where μ and ν are terms of $\mathfrak{L}$
3. $\alpha_i = \neg\alpha_j$ where $j < i$
4. $\alpha_i = (\alpha_j \& \alpha_k)$ where $j, k < i$
5. $\alpha_i = (\exists x_j \in \mu)\alpha_k$ where $k < i$, and μ is a term of $\mathfrak{L}$ in which x_j doesn't occur.

formula に出てくる variables のうち，$\exists$ に束縛されているものを，bounded variable，そうでないものを free variable という．そして特に free variable を持たない formula を，sentence と呼ぶ．また，formula α が $x_1, \cdots x_k$ という free variables を持つ場合は，term の場合と同様に，それを明示して，$\alpha(x_1, \cdots x_k)$ と書く．このとき $x_1, \cdots x_k$ を全て constants $b_1, \cdots b_k$ で置き換えれば，これは sentence になる．

次に，closed term や sentence の U での解釈を定義する．直感的には明らかだが，まず次の手順で closed term μ の U における値 $|\mu|_U$ を定義する．(U を明示する必要がないときは単に $|\mu|$ と書く．)

1. μ が constant b の場合は，1 対 1 に対応する U の元があるので，これを同じ文字で b と書き，$|b|_U = b$.
2. $|<\mu, \nu>|_U = <|\mu|_U, |\nu|_U>$
3. $|(\mu \lceil \nu)|_U = (|\mu|_U \lceil |\nu|_U)$

あとは term の構成法から，帰納的に定めることができる．

そして次に，sentence の真偽を定めよう．次のような手順で，$U \models \alpha$ を定義する．

1. $U \models (\mu = \nu)$ とは，$|\mu|_U = |\nu|_U$ のとき．(そしてもちろんその場合のみ．以下も同様.)
2. $U \models (\mu \in \nu)$ とは，$(|\mu|_U) \in (|\nu|_U)$ のとき．
3. $U \models \neg\alpha$ とは，$U \models \alpha$ でないとき．
4. $U \models (\alpha \& \beta)$ とは，$U \models \alpha$ かつ $U \models \beta$ のとき．
5. $U \models (\exists x_i \in \mu)\alpha(x_i)$ とは，$U \models \alpha(c)$ がある $c \in |\mu|_U$. に対して成り立つとき．

あとは formula の構成法から，帰納的に定めることができる．$U \models \alpha$ のとき，α is true in U という．そうでないとき，$U \not\models \alpha$ と書き，α is false in U という．

Definition 2.3.3 $A \subseteq U$ とする．A が definable (厳密には，definable subset of U) とは，ある $\mathfrak{L}_U$ の formula $\alpha = \alpha(x)$ が存在して，

$$A = \{b \in U | U \models \alpha(b)\}$$

と書ける場合とする．

また，今までの定義では，$\vee, \to, \leftrightarrow, \forall$ は出てこなかったが，それぞれ次の formula を表していると考えれば，これらを用いることができる．(また，上の $U \models \alpha$ を定める手順に戻って考えることで，これらはいつも通りの解釈と一致することが分かる．)

$$\begin{aligned}(\alpha \vee \beta) &= \neg(\neg\alpha\&\neg\beta) \\ (\alpha \to \beta) &= \neg(\alpha\&\neg\beta) \\ (\alpha \leftrightarrow \beta) &= ((\alpha \to \beta)\&(\beta \to \alpha)) \\ (\forall x_i \in \mu)\alpha &= \neg(\exists x_i \in \mu)\neg\alpha\end{aligned}$$

2.4 ŁOS' THEOREM

$\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_{\hat{S}}$, ${}^*\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_{\tilde{W}}$ とする．またそれぞれの term の解釈は，$|\mu|$, $|\mu|_*$ のように書くことにする．λ を $\mathfrak{L}$ の formula (or term) としよう．これに対する ${}^*\mathfrak{L}$ の formula (or term) ${}^*\lambda$ を，λ に含まれる全ての constant b を，$\tilde{W}$ で $\bar{b}$ を表す $\mathfrak{L}$ の constant $\bar{b}$ で置き換えて得られるものと定める.（ここで，b や $\bar{b}$ を，language の constant と universe の元 の 2 通りの意味で使っていることに注意.）この定義より，λ に出てくる全ての constant が individual を表す場合は，${}^*\lambda = \lambda$ となる.

Theorem 2.4.1 $\mu(x_1, \cdots x_n)$ を $\mathfrak{L}$ の term，$g^1, \cdots g^n \in Z$, $\bar{g} = |{}^*\mu(\bar{g^1}, \cdots \bar{g^n})|_*$ とする．すると，

$$g_d = |\mu(g_d^1, \cdots g_d^n)| \text{ a.e.}$$

[proof] term の構成に関する帰納法で示せる.（つまり，“ (”や“ $<$ ”の出現回数についての帰納法）

Corollary 2.4.2 $\mu(x_1, \cdots x_n)$ を $\mathfrak{L}$ の term，$g^1, \cdots g^n \in Z$，各 $d \in I$ に対して，$h_d = |\mu(g_d^1, \cdots g_d^n)|$ とおく．すると，次が成立.

$$h \in Z \quad \text{and} \quad \bar{h} = |{}^*\mu(\bar{g^1}, \cdots \bar{g^n})|_*$$

[proof] まず $h \in Z$ と仮定して，$\bar{g} = |{}^*\mu(\bar{g^1}, \cdots \bar{g^n})|_*$ とおくと Theorem 2.4.1 より $g_d = h_d$ a.e. なので，Theorem 2.2.6 より $\bar{h} = \bar{g}$ を得る．そして，$h \in Z$ であることは，term の構成に関する帰納法で言える.

Theorem 2.4.3 (Łos' theorem)

$\alpha = \alpha(x_1, \cdots x_n)$ を $\mathfrak{L}$ の formula，$g^1, \cdots g^n \in Z$ とする．すると，以下が成り立つ.

$$* \models {}^*\alpha(\bar{g^1}, \cdots \bar{g^n}) \quad \text{if and only if} \quad \models \alpha(g_d^1, \cdots g_d^n) \text{ a.e.}$$

[proof] α の中に出てくる“ $\neg$ ”，“ & ”，“ $\exists$ ”の個数 k についての帰納法で示す.

[$k = 0$ のとき（$\alpha = (\mu = \nu)$ or $(\mu \in \nu)$ の形のとき）]

まず，$\alpha = (\mu = \nu)$ の場合，${}^*\alpha = ({}^*\mu = {}^*\nu)$ である．Theorem 2.4.1 と Theorem 2.2.6 より，

$$\begin{aligned}{}^* \models {}^*\alpha(\bar{g^1}, \cdots \bar{g^n}) \quad &\text{if and only if} \quad |{}^*\mu(\bar{g^1}, \cdots \bar{g^n})|_* = |{}^*\nu(\bar{g^1}, \cdots \bar{g^n})|_* \\ &\text{if and only if} \quad |\mu(g_d^1, \cdots g_d^n)| = |\mu(g_d^1, \cdots g_d^n)| \text{ a.e.} \\ &\text{if and only if} \quad \models \alpha(g_d^1, \cdots g_d^n) \text{ a.e.}\end{aligned}$$

また，この証明の“ $=$ ”を“ $\in$ ”で置き換えれば，もう一方の場合の証明になる.

[$k > 0$ のとき（$\alpha = \neg\beta$, $\alpha = (\beta\&\gamma)$, or $\alpha(x_1, \cdots x_n) = \big(\exists x \in \mu(x_1, \cdots x_n)\big)\, \beta(x, x_1, \cdots x_n)$ の形）]

帰納法の仮定として，β, γ に対しては定理が成立するとする.

(その１) $\alpha = \neg\beta$ の場合

$$\begin{aligned} {}^* \models {}^*\alpha(\bar{g^1}, \cdots \bar{g^n}) \quad & \text{if and only if} \quad {}^* \not\models {}^*\beta(\bar{g^1}, \cdots \bar{g^n}) \\ & \text{if and only if} \quad \not\models \beta(g_d^1, \cdots g_d^n) \ \text{a.e.} \\ & \text{if and only if} \quad \models \alpha(g_d^1, \cdots g_d^n) \ \text{a.e.} \end{aligned}$$

(その２) $\alpha = (\beta \& \gamma)$ の場合

$$\begin{aligned} {}^* \models {}^*\alpha(\bar{g^1}, \cdots \bar{g^n}) \quad & \text{if and only if} \quad {}^* \models {}^*\beta(\bar{g^1}, \cdots \bar{g^n}) \text{ and } {}^* \models {}^*\gamma(\bar{g^1}, \cdots \bar{g^n}) \\ & \text{if and only if} \quad \models \beta(g_d^1, \cdots g_d^n) \ \text{a.e. and } \models \gamma(g_d^1, \cdots g_d^n) \ \text{a.e.} \\ & \text{if and only if} \quad \models \alpha(g_d^1, \cdots g_d^n) \ \text{a.e.} \end{aligned}$$

(その３) $\alpha(x_1, \cdots x_n) = \big(\exists x \in \mu(x_1, \cdots x_n)\big)\, \beta(x, x_1, \cdots x_n)$ の場合

まず，${}^* \models {}^*\alpha(\bar{g^1}, \cdots \bar{g^n})$, $\bar{h} = |{}^*\mu(\bar{g^1}, \cdots \bar{g^n})|_*$ と仮定する．${}^*\alpha$ の解釈から，ある $\bar{g} \in \tilde{W}$ が存在して，

$$\bar{g} \in \bar{h} \text{ and } {}^* \models {}^*\beta(\bar{g}, \bar{g^1}, \cdots \bar{g^n})$$

Theorem 2.2.6 と帰納法の仮定から，

$$g_d \in h_d \,\text{a.e.} \quad \models \beta(g_d, g_d^1, \cdots g_d^n)\,\text{a.e.}$$

また，Theorem 2.4.1 より，$h_d = |\mu(g_d^1, \cdots g_d^n)|$ a.e. となるので，

$$\models \alpha(g_d^1, \cdots g_d^n)\,\text{a.e.}$$

次は逆に $\models \alpha(g_d^1, \cdots g_d^n)$ a.e. を仮定する．$h_d = |\mu(g_d^1, \cdots g_d^n)|$ とおくと，Corollary 2.4.2 より，$h \in Z$, $\bar{h} = |{}^*\mu(\bar{g^1}, \cdots \bar{g^n})|_*$ である．すると仮定より，次のような g_d が存在する．

$$[\, g_d \in h_d \text{ and } \models \beta(g_d, g_d^1, \cdots g_d^n)\,]\,\text{a.e.}$$

帰納法の仮定と Theorem 2.2.6 から，

$$\bar{g} \in \bar{h} \text{ and } {}^* \models {}^*\beta(\bar{g}, \bar{g^1}, \cdots \bar{g^n}).$$

したがって，

$${}^* \models {}^*\alpha(\bar{g^1}, \cdots \bar{g^n})$$

となる．(証明終わり)

とくに $n = 0$ のŁos' theorem として，次の系を得る．

Corollary 2.4.4 (transfer principle)　α を $\mathfrak{L}$ の sentence とする．すると，次が成り立つ．

$${}^* \models {}^*\alpha \quad \text{if and only if} \quad \models \alpha$$

Definition 2.4.5　A を definable subset とする．そして A は $\mathfrak{L}$ の formula α によって，$A = \{b \in \hat{S} | \models \alpha(b)\}$ と書けるとする．このとき，A に対して，${}^*A$ を，

$${}^*A = \{b \in \tilde{W} | \ {}^* \models {}^*\alpha(b)\}$$

と定義する．

[問]　この定義が well defined であること（α のとり方に依存しないこと）を示せ．

Corollary 2.4.6 r を $r \in \hat{S} - S$ とする．すると r は definable で，${}^*r = \bar{r}$.
[proof] $\mathfrak{L}$ の formula $\alpha(x)$ として，$\alpha(x) = (x = r)$ をとればよい.（証明終わり）

さらに standard universe $\hat{S}$ (今からこれを U と書く）自身も，$\alpha(x) = (x = x)$ によって definable であるので，${}^*U = \{b \in \tilde{W} | {}^* \models (b = b)\} = \tilde{W}$ となり，${}^*U$ が nonstandard universe $\tilde{W}$ となっている．また，S の元 x に対しては，x がそもそも集合でないため，${}^*x$ は上では定義されないが，便宜上 ${}^*x = \bar{x} = x$ と定義しておく．以上の議論を用いると，以下の定理が示せる．証明は比較的簡単なので，[問] とする．

Theorem 2.4.7 $A \subseteq S$ とする．このとき，$A \subseteq {}^*A$ and ${}^*A \cap S = A$ である．

Theorem 2.4.8 $x, y \in U$ とする．このとき以下が成り立つ．

1. $x = y$ if and only if ${}^*x = {}^*y$
2. $x \in y$ if and only if ${}^*x \in {}^*y$
3. ${}^* < x, y > = < {}^*x, {}^*y >$
4. ${}^*(x \lceil y) = ({}^*x \lceil {}^*y)$

Theorem 2.4.9 A, B を definable subsets of U とする．すると，以下が成り立つ．

1. ${}^*(A \cup B) = {}^*A \cup {}^*B$
2. ${}^*(A \cap B) = {}^*A \cap {}^*B$
3. ${}^*(A - B) = {}^*A - {}^*B$

Corollary 2.4.10 ${}^*\phi = \phi,\ {}^*\{a_1, \cdots a_k\} = \{{}^*a_1, \cdots {}^*a_k\}$

Theorem 2.4.11 ${}^*U = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} {}^*(S_i)$

Theorem 2.4.12 $f \in U$ を写像，$C \subseteq \mathrm{dom}(f)$ とすると，${}^*(f[C]) = {}^*f[{}^*C]$ である．

また，formula をいちいち書くのは大変なので，いくつかの略記してよいものを確認しよう．

1. X is a set $: \alpha_1(X) \equiv (X = \phi) \vee (\exists x \in X)(x = x)$
2. $X \subseteq Y\ :\ \alpha_2(X, Y) \equiv \alpha_1(X)\,\&\alpha_2(Y)\,\&\,(\forall x \in X)(x \in Y)$
3. $Z = X \times Y : (\forall z \in Z)(\exists x \in X)(\exists y \in Y)(z = < x, y >)\&(\forall x \in X)(\forall y \in Y)(\exists z \in Z)(z = < x, y >)$
4. f maps X into $Y : \alpha_4(f, X, Y) \equiv (\alpha_1(X)\&\alpha_1(Y)\&\alpha_1(f)\&$
   $(\forall t \in f)(\exists x \in X)(\exists y \in Y)(t = < x, y >)\&\ (\forall x \in X)(\forall y \in Y)(< x, y > \in f \leftrightarrow y = f\lceil x))$
5. f maps X onto $Y : \alpha_4(f, X, Y)\&(\forall y \in Y)(\exists x \in X)(y = f\lceil x)$

これらを用いると，次の定理が示される．

Theorem 2.4.13 $A, B \in U,\ A \subseteq B$ とすると，${}^*A \subseteq {}^*B$ である．

Theorem 2.4.14 $B \in U,\ A \in {}^*U,\ A \subseteq {}^*B$ とすると，$A \in {}^*(\mathfrak{P}(B))$ である．

また，4. の略記から，$f\ :\ A \to B$ に対して，${}^*f\ :\ {}^*A \to {}^*B$ となる．とくに $A, B \subseteq S$ のときは，$A \subseteq {}^*A, B \subseteq {}^*B$ であり，transfer principle より A 上では f と ${}^*f$ の値が一致する．このような場合，${}^*f$ は f の拡張になっているとみなし，* を省いて単に f と書く．同様のことが relation $r \subseteq A \times B,\ A, B \subseteq S$ に対しても言えるので，この場合も * を省略する．

2.5 CONCURRENCE

いままでのところ，I や F のとり方には言及してこなかった．例えば $I = \{0, 1\}, F = \{I\}$ などとすると F は ultrafilter だが，すぐに $W = S$ ということが分かり，何も意味がないことをしていた $\cdots$ ということになってしまう．こうなっては困るので，この節では I や F のとり方を（次の concurrence theorem の証明に出てくる I や F として）決める．

Definition 2.5.1 relation r が concurrent (in U) とは，$r \in U$ で，いかなる有限個の $a_1, \cdots a_k \in \mathrm{dom}(r)$ に対しても，ある $b \in U$ が存在して $< a_i, b > \in r$ for $i = 1, 2, \cdots k$ となるときをいう．

Theorem 2.5.2 (concurrence theorem)

relation r を concurrent (in U) とする．するとある $b \in {}^*U$ が存在して，以下を満たす.（そうなるように F, I をとれる.）

$$< {}^*a, b > \in {}^*r \quad \text{for all } a \in \mathrm{dom}(r)$$

[proof] まず I を，次をみたす function α 全体の集合とする．

- α は，U の concurrent relation r 全体の集合を定義域とする function.
- concurrent relation r に対して，$\alpha(r)$ は，$\mathrm{dom}(r)$ の有限部分集合を値にとる．

そして $\alpha, \beta \in I$ に対して，$\alpha < \beta$ とは

$$\alpha(r) \subseteq \beta(r) \quad \text{for each concurrent relation } r \in U$$

$\gamma = \alpha \vee \beta$ とは

$$\gamma(r) = \alpha(r) \cup \beta(r) \qquad (\rightarrow \text{すると } \gamma \in I)$$

Γ_α は

$$\Gamma_\alpha = \{\beta \in I | \alpha < \beta\}$$

を表すとそれぞれ定義する．

Lemma 2.5.3 $\Gamma_\alpha \cap \Gamma_\beta = \Gamma_{\alpha \vee \beta}$

[proof] $\gamma \in \Gamma_\alpha \cap \Gamma_\beta \leftrightarrow \alpha < \gamma, \beta < \gamma \leftrightarrow \forall r\ \alpha(r) \subseteq \gamma(r), \beta(r) \subseteq \gamma(r) \leftrightarrow \alpha \vee \beta < \gamma \leftrightarrow \gamma \in \Gamma_{\alpha \vee \beta}$

Lemma 2.5.4 $G = \{\Gamma_\alpha | \alpha \in I\}$ は，I 上の filter basis.

[proof] filter basis の定義に戻って示す．(1) どのような G の元 Γ_α も，少なくとも α を元として持つため，G の元はどれも空ではない． (2) 全ての concurrent relation r にたいして，$\alpha_0(r) = \phi$ と定義することで，G が少なくとも α_0 という元を持つことが分かる．よって $G \neq \phi$ (3)$\Gamma_\alpha, \Gamma_\beta \in G$ に対して，Lemma 2.5.3 より，$\Gamma_\alpha \cap \Gamma_\beta = \Gamma_{\alpha \vee \beta} \in G$. (Lemma 2.5.4 の証明終わり)

Corollary 2.1.6 より，G を含む I 上の ultrafilter F をとることができる．そこで，F はこのようにとることにする．まとめると，

Lemma 2.5.5 F は I 上の ultrafilter で，各 $\alpha \in I$ に対して $\Gamma_\alpha \in F$.

ということである．

さて，Concurrent relation $r \in U$ を一つとって固定し，$r \in S_k$ とする．$f : I \rightarrow U$ を，$\alpha \in I$ に対して次を満たす f_α を対応させる写像として定義する．

$$< a, f_\alpha > \in r \text{ が}, \alpha(r) \text{ の任意の元 } a \text{ に対して，成り立つ.}$$

（このように定義できるのは，Concurrent relation の定義による.）そして各 $\alpha \in I$ に対して，S_k の transitivity より，$f_\alpha \in S_k$，よって $f \in Z$ であることが分かるので，$b = \bar{f} \in {}^*U$ とおく．すると，次の Lemma が成り立つ．

Lemma 2.5.6　各 $a \in \mathrm{dom}(r)$ に対して，$\{\alpha | < a, f_\alpha > \in r\} \in F$.（すなわち，$< a, f_\alpha > \in r$ a.e.）

[proof]　$\beta \in I$ を，$\beta(X) = \{a\}(X = r$ のとき$), \phi\,(X \neq r$ のとき$)$ と定める．すると，

$$\alpha \in \Gamma_\beta \;\to\; \beta < \alpha \;\to\; \beta(r) \subseteq \alpha(r) \;\to\; a \in \alpha(r) \;\to < a, f_\alpha > \in r \;\to\; \alpha \in \{\alpha' | < a, f_{\alpha'} > \in r\}$$

となり，$\Gamma_\beta \subseteq \{\alpha | < a, f_\alpha > \in r\} \in F$ を得る．Lemma 2.5.5 より $\Gamma_\beta \in F$ なので，filter の満たす条件から，$\{\alpha | < a, f_\alpha > \in r\} \in F$ が成り立つ.（Lemma 2.5.6 の証明終わり）
この Lemma とŁos' theorem より，concurrence theorem が導かれる.（定理の証明終わり）

以後は concurrence theorem が成り立つこの F, I をとっておくとする．最後に少しだけ，Concurrence theorem を使う具体例を見て終わりにしよう．まず $\mathbb{N} \subseteq S$ とする．すると Theorem 2.4.7 より $N \subseteq {}^*N$ である．さて，次の relation を考えよう．

$$L = \{< x, y > | x \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{N}, x < y\}$$

[問] これが concurrent であることを示せ.

すると concurrence theorem より，ある $b \in {}^*U$ が存在して，全ての $a \in \mathbb{N}$ に対して $< {}^*a, b > \in {}^*L$ が成り立つ．そもそも $L \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ だったので，前節の議論から ${}^*L \subseteq {}^*\mathbb{N} \times {}^*\mathbb{N}$．よって，$b \in {}^*\mathbb{N}$ である．この b がもし $\mathbb{N}$ の元だとすると，${}^*b = b$ なので，${}^* \models < {}^*a, {}^*b > \in {}^*L$ と transfer principle から，全ての自然数 a に対して $a < b$ であることになってしまう.（もちろんそんなことはない.）よって $b \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$ である.（これは，Nonstandard individual）

2.4 節の終わりに書いたように，$x, y \in {}^*\mathbb{N}$ に対しても，$< x, y > \in {}^*L$ の時は $x < y$ と書くことにすると，上の $b \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$ は，全ての $a \in \mathbb{N}$ に対して $a < b$ であり，これが無限大自然数である．また，いま $<$ を ${}^*\mathbb{N}$ 上の関係に拡張したが，これが全順序であることに変わりはない.（というのは，$\mathbb{N}$ 上での $<$ の全順序性を表す formulae を書いて，transfer principle を用いれば，直ちに得られるからである．）

この最後の全順序性のように，transfer principle を用いると，${}^*U$ 上でもいろいろな構造を保つことができる．そして，今見たように，無限大や (まだ出てきていないけれど) 無限小が出現し，これらを使いながら解析をこれから展開していくわけである．ここまでで，基礎の部分はまあまあ説明したので，これ以降の応用は当日話すことにして，ひとまず事前のテキストはこれにて終わりにしようと思います.

参考文献

[1] Martin Davis. *Applied Nonstandard Analysis.* John Wiley & Sons, New York, 1977.

[2] Sergio Albeverio, Jens Eric Fenstad, Raphael Høegh-Krohn, Tom Lindstrøm. *Nonstandard Methods in Stochastic Analysis and Mathematical Physics.* Academic Press, Inc., Orlando, Florida, 1986.

[3] Abraham Robinson. *Non-standard Analysis Rev. ed.* Princeton University Press, 1996.

[4] 河東泰之『超準解析』講義ノート (2007 年度東京大学教養学部での講義ノート)

[5] 齊藤正彦．数学の基礎．東京大学出版, 2002

[6] 田中一之．数の体系と超準モデル．裳華房，2002