多元連立方程式を解く

岡山大学理学部数学科 3 年　金川浩平

2009 年 11 月

1　この講義の目的

この講義の目的は多元連立方程式を解くことである.
例えば, 連立方程式

$$3x^2 + 2yz - 2xa = 0$$

$$2xz - 2ya = 0$$

$$2xy - 2z - 2za = 0$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$$

を解き, 解 (x,y,z) を求めたいとしよう (a は求めなくてよいとする).
この講義では, グレブナ基底という概念を与え, 上のような連立方程式をアルゴリズム的に解く方法を与える.

2　代数的知識の構成

我々の目的は前章で話した通り, 多項式の連立方程式

$$f_1(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0$$

$$f_2(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0$$

$$\cdots$$

$$f_m(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0$$

を解くことである.
以下,$f_1(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ などを f_1 と表すことにする. 今,$f_1, f_2, \cdots, f_m$ が (代入して) 全て 0 になる点 $(x_1, x_2, \cdots, x_n) = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$ に対して,

$$k_1 f_1 + k_2 f_2 + \cdots + k_m f_m$$

もまた $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ を代入して 0 となる (ここで,$k_1, \cdots, k_m$ は任意の多項式). これは, 重要な指摘をし, たとえば上のような形の多項式で, ただ一つの変数のみからなる多項式を見つければ, 連立方程式は比較的簡単に解けるようになる. よって, 上の形をしているもの全体の集合を考えるのは極めて自然である.

定義 1 多項式 $f_1, f_2, \cdots, f_m$ が生成する**イデアル** $< f_1, \cdots, f_m >$ とは,

$$< f_1, \cdots, f_m >= \{\sum_{i=1}^{m} k_i f_i : k_i \text{は多項式}\} \tag{1}$$

で定義されるものである.
このとき,$f_1, f_2, \cdots, f_m$ をそのイデアルの**生成元**と呼ぶ.

例 1 x, y の多項式を考えるとして,
$xy^2 \in < x >$, $xyz + y^2z \in < yz, y^2 >$, $2x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 \in < x + y, x^3 >$

また, イデアルは次の性質を満たす.

定理 1 多項式 $f_1, \cdots, f_m$ が生成するイデアル $I =< f_1, \cdots, f_m >$ は次の性質を満たす.
(1) $f, g \in I$ に対して,$f + g \in I$
(2) $f \in I$,g を任意の多項式とするとき, その積 $fg \in I$

ここで,fg は合成積を意味するのではなく, 通常の積を意味する. 実は多項式で考える場合は, 上の定理の (1), (2) を満たすことと,I がイデアルであることが同値であることが分かる. よって, 上の性質をイデアルの定義とする場合もある.

我々の目的はすなわち,$< f_1, \cdots, f_m >$ の簡単な生成元を与えることであり, それらを求めるアルゴリズムを与えることである. その簡単な生成元がグレブナ基底とよばれるものである.

3 単項式の順序

グレブナ基底を構成するには, まず単項式に順序を定義する必要がある.

定義 2 $x_1, x_2, \cdots x_n$ を未知数として持つ単項式は,${x_1}^{a_1}{x_2}^{a_2}\cdots{x_n}^{a_n}$ 形であり (実際にはこれの係数倍), これを簡単に $\mathbf{x}^{\mathbf{a}}$ と書くことにしよう.
このとき $\mathbf{x}^{\mathbf{a}}$ に対応して,$\mathbf{a} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$ が定義される.

例 2 $\mathbf{x}^{\mathbf{a}} = {x_1}^2{x_2}^4{x_3}^3$ のとき,$\mathbf{a} = (2, 4, 3)$

定義 3 辞書式順序
$\mathbf{x}^{\mathbf{a}}, \mathbf{x}^{\mathbf{b}}$ を n 変数の単項式とする. $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ を計算したときの一番左の 0 でない数が正であるときであるとき,$\mathbf{x}^{\mathbf{a}} > \mathbf{x}^{\mathbf{b}}$ と定義する.

例 3 ${x_1}^3x_2 > {x_1}^2{x_2}^7{x_3}^4$
$x_1 > x_2 > x_3 > x_4 > \cdots > x_n$

上の例からも分かるように, 辞書式順序では x_1 が一番優先されて順序が大きくなり, 次に x_2 が優先され, その次は x_3 が優先され $\cdots$ のように順序が決定される. また,3 変数 x, y, z からなる単項式などにも $x > y > z$ などと置くことにより, 辞書式順序が定義できる (つまり,$x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$ と考えるのである).

例 4 $t > x > y > z$ と変数に順序をつけたとき, 次の単項式
・x^2y ・txy ・y^3 ・yz
を辞書式順序で大きい順に並べると,
・txy ・x^2y ・y^3 ・yz

次に多項式について考えよう. 単項式に対して順序が決まれば, 多項式 f を”**降べきの順**”に並べることができる. すなわち, 順序の大きな単項式は左側に, 順序の小さな単項式は右側によせるのである. また, その順序に対してもっとも順序が大きい単項式を**先頭項**(leading term) といい,LT(f) で表す.
例 5

$$f(x, y, z) = y^6 + 4xy^2z^2 + x^2yz - xy^2 + yz + 5$$

を $x > y > z$ で降べきの順に並べると,

$$f(x, y, z) = x^2yz + 4xy^2z^2 - xy^2 + y^6 + yz + 5$$

であり, 先頭項は $LT(f) = x^2yz$ である.
また,$z > x > y$ と順序をつけ, 降べきの順に並べると,

$$f(x, y, z) = 4xy^2z^2 + x^2yz + yz - xy^2 + y^6 + 5$$

であり, 先頭項は $LT(f) = 4xy^2z^2$ である.

4 わり算アルゴリズム

一変数におけるわり算アルゴリズムは既に習っているはずであり, その結果は

定理 2 $f(x)$ を $g(x)$ で割った商を $Q(x)$, 余りを $r(x)$ とすると,$f(x) = Q(x)g(x) + r(x)$ となり,$r(x)$ の次数は $g(x)$ の次数よりも小で $r(x)$ は一意に定まる.

このようなわり算を多変数でも行いたいというのがこの章の目的である.

例で話すとしよう. $f = xy^2 + 1$ を除数 $f_1 = xy + 1, f_2 = y + 1$ で割る事を考えよう. この際, 順序を $x > y$ なる辞書式順序で考える. 今回, 二つの除数で割るので商も二つ a_1, a_2 が必要になるはずである. それを次のように書くことにしよう.

$$\begin{array}{rcl} a_1 & : & \\ a_2 & : & \\ \cline{3-3} xy+1 &) & xy^2+1 \\ y+1 &) & \end{array}$$

まず,$LT(f) = x^2y$ を $LT(f_1)$ と $LT(f_2)$ で割っていくことを考えよう. この場合,f_1 が先にあるので, 先に $LT(f_1)$ で割ろう.

$$\begin{array}{rcl} a_1 & : & y \\ a_2 & : & \\ \cline{3-3} xy+1 &) & xy^2+1 \\ y+1 &) & \underline{xy^2+y} \\ & & -y+1 \end{array}$$

これ以上 f_1 で割ることは考えられないので,f_2 に対して同じ操作を行う.

$$
\begin{array}{ccc}
a_1 & : & y \\
a_2 & : & -1 \\ \cline{3-3}
xy+1 &) & xy^2+1 \\
y+1 &) & \underline{xy^2+y} \\
 & & -y+1 \\
 & & \underline{-y-1} \\
 & & 2
\end{array}
$$

とわり算が出来るので, 結局余りは 2 となり

$$xy^2+1 = y(xy+1)+(-1)(y+1)+2 \tag{2}$$

が成立することが分かる.

次の例をみてみよう. 次は $f = x^2y + xy^2 + y^2$ を除数 $f_1 = xy-1, f_2 = y^2-1$ で割ることを考えよう.

$$
\begin{array}{ccc}
a_1 & : & x+y \\
a_2 & : & \\ \cline{3-3}
xy-1 &) & x^2y+xy^2+y^2 \\
y^2-1 &) & \underline{x^2y+xy^2-x-y} \\
 & & x+y^2+y
\end{array}
$$

このとき,$LT(f_1) = xy$ も $LT(f_2) = y^2$ も $LT(x+y^2+y) = x$ を割り切らない. しかし, 明らかに $x+y^2+y$ は f_2 でまだまだ割り切ることが出来る. ゆえにこれはまだ余りではないはずである. よって, この場合 x を余りに移してわり算を続ければよい. このステップを図に加えるために図に余り欄を作り,x を余り欄に移すといいだろう (それを→で表す).

$$
\begin{array}{ccccc}
a_1 & : & x+y & & \text{余り欄} \\
a_2 & : & 1 & & \\ \cline{3-3}
xy-1 &) & x^2y+xy^2+y^2 & & \\
y^2-1 &) & \underline{x^2y+xy^2-x-y} & & \\
 & & \underline{x+y^2+y} & & \\
 & & y^2+y & \rightarrow & x \\
 & & \underline{y^2-1} & & \\
 & & \underline{y+1} & & \\
 & & 0 & \rightarrow & x+y+1
\end{array}
$$

よってこのとき, 余りは $x+y+1$ であり,

$$x^2y+xy^2+y^2 = (x+y)(xy-1)+(y^2-1)+x+y+1 \tag{3}$$

が成立する.

しかも, このとき $x+y+1$ の各項は $LT(f_1)$ や $LT(f_2)$ では割り切ることは出来ない.

一般には次の定理が成立する.

定理 3 *(n変数におけるわり算アルゴリズム)*
単項式の順序を一つ固定し,$F=(f_1, f_2, \cdots, f_m)$ を順序づけられたｎ変数の多項式の集合とする．このとき, どんな多項式 f も

$$f = a_1 f_1 + a_2 f_2 + \cdots + a_m f_m + r$$

と表すことが出来る．ここで,rは *0*か単項式の和であり,rの各単項式は$LT(f_1), LT(f_2), \cdots, LT(f_m)$のいずれでも割り切れない．このとき,$r$を Fで fを割った余りと呼ぶ.

ここで, 注目すべき注意を与えよう．先のわり算アルゴリズムでは f_1 で割ってから f_2 で割って $\cdots$ と $(f_1, f_2, \cdots, f_m)$ の順序づけが必要であった．その順序づけを変更したとき, 余りは変化してほしくない. しかし, 一般には順序づけを変えると余りは変化してしまうのである.

その例を見てもらおう.

例 6 $f = x^2y + xy^2 + y^2$ を除数 $f_1 = y^2 - 1, f_2 = xy - 1$ で割ることを考えよう. 除数の順序づけが異なる以外は先ほどの例と同様である.

$$\begin{array}{ccccc}
a_1 & : & x+1 & & \text{余り欄} \\
a_2 & : & x & & \\ \cline{3-3}
y^2-1 &) & x^2y + xy^2 + y^2 & & \\
xy-1 &) & x^2y - x & & \\ \cline{3-3}
 & & xy^2 + x + y^2 & & \\
 & & xy^2 - x & & \\ \cline{3-3}
 & & 2x + y^2 & & \\ \cline{3-3}
 & & y^2 & \rightarrow & 2x \\
 & & y^2 - 1 & & \\ \cline{3-3}
 & & 1 & & \\ \cline{3-3}
 & & 0 & \rightarrow & 2x+1
\end{array}$$

よって, この場合の余りは $2x+1$ であり, 前回の余り *x+y+1* とは異なる !!

5　グレブナ基底の構成

ようやく, グレブナ基底が定義できる.

定義 4 イデアル Iの生成元 $G = (g_1, g_2, \cdots, g_m) \subset I$ が**グレブナ基底**であるとは, I の任意の元の先頭項が,$LT(g_1), \cdots, LT(g_m)$ のいずれかの倍元であるときである.
すなわち, $LT(I) = \{LT(f) : f \in I\}$ と定義したとき,

$$LT(I) = < LT(g_1), \cdots, LT(g_m) > \tag{4}$$

が成立するときである.

定理 4 *I をイデアルとする. 任意の多項式 f を I のグレブナ基底 $G=(g_1,g_2,\cdots,g_m)$ で割った余りを r とするとき, 次が成立.*
(1)$g=f-r$ はイデアル I に属する. すなわち、$f=g+r,(g\in I)$
(2) 余りは (グレブナ基底の順序づけによらず) 一意的に存在する.

証明 (1)r は余りなので,

$$f=a_1g_1+\cdots+a_mg_m+r$$

となる多項式 $a_1,\cdots,a_m$ が存在する. このとき, 明らかに $g=f-r\in I$ である.
(2) 余りが r と r' の二つ存在すると仮定すると,(1) より

$$f=g+r=g'+r$$

となる $g,g'\in I$ が存在する. よって,$r-r'=g'-g\in I$ 　が成立する.
このとき,$r-r'$ が0で無ければ, グレブナ基底の定義により $LT(r-r')$ は $LT(g_1),\cdots,LT(g_m)$ のいずれかの倍元でなければならないが, そのような事にはならない.(なぜなら r,r' はともに余りであり, 余りの各単項式は $LT(g_1),\cdots,LT(g_m)$ で割り切れないのであった.)
よって,$r-r'=0$ となり, 余りの一意性が示せた.　　（証明終）
上の定理は, グレブナ基底の重要性, すなわち１変数の場合と同様に余りが一意に定まることを意味している.

以下では, **グレブナ基底を構成するアルゴリズム**について説明する. 例で説明しよう. $f_1=x^3-2xy$, $f_2=x^2y+x-2y^2$ に対して, $I=<f_1,f_2>$ とおいたとき,I のグレブナ基底を構成しよう.($x>y$ なる辞書式順序を使う.)

$$-x^2=y(x^3-2xy)-x(x^2y+x-2y^2)\in I$$

であるので,$LT(-x^2)\in LT(I)$ であるが, これは $LT(f_1)=x^3,LT(f_2)=x^2y$ のいずれの倍元でもない. ゆえに (f_1,f_2) は I のグレブナ基底ではない.
しかし,$f_3=-x^2$ とし $G=(f_1,f_2,f_3)$ とすればグレブナ基底になるかもしれない (実はこれはまだグレブナ基底にはならない. これのグレブナ基底は後で求める).

この例はグレブナ基底を構成するヒントを与えている. すなわち, 生成元は多ければ多いほどグレブナ基底に近づくので,G に多項式を付け加えて, もともとある生成元の集合を拡張することである.
よって, 議論はどのような元を付け加えるかを考えることである. まず, 上の式でなぜ $LT(f_1)$ でも $LT(f_2)$ でも割り切れない $-x^2$ が出来たかを考えると, それぞれの先頭項が打ち消しあい 0 となり, 次に大きな項が先頭項となったからである. ゆえに, 次の定義を与える.

定義 5 f,g を多項式とする. $LT(f)$ と $LT(g)$ の最小公倍元を $\mathbf{x}^{\mathbf{s}}$ とする. このとき,

$$S(f,g)=\frac{\mathbf{x}^{\mathbf{s}}}{LT(f)}f-\frac{\mathbf{x}^{\mathbf{s}}}{LT(g)}g \tag{5}$$

を f と g の **S 多項式** *(S-polynomial)* という.

ここで,$S(f,g)$ では f と g の先頭項が打ち消しあっている.

例 7 $f=x^3y^2-x^2y^3+x, g=3x^4y+y^2$ のとき,$\mathbf{x}^{\mathbf{s}}=x^4y^2$ であり,

$$S(f,g)=\frac{x^4y^2}{x^3y^2}f-\frac{x^4y^2}{3x^4y}g=xf-(1/3)yg=-x^3y^3+x^2-(1/3)y^3$$

S 多項式は先頭項が打ち消しあうように構成されているので, イデアル I の基底 $F=(f_1,f_2,\cdots,f_m)$ に $S(f_i,f_j)$ を付け加えていくことで, いつかは任意の $f\in I$ に対して,LT(f) がイデアル I の基底 $F=(f_1,f_2,\cdots,f_m)$ に $S(f_i,f_j)$ を付け加えていくことでグレブナ基底が構成できそうである. しかし, このままでは, 余分なものまで F に付け加える可能性がある. 余分なものとは, 既に $f_1,f_2,\cdots,f_m$ で表せる部分のことである. これを解決するためには,$S(f_i,f_j)$ を F で割った余り r を考えればよいだろう.

以上より, イデアル I の**グレブナ基底を構成するアルゴリズム**は次のようになる.
まず,I の基底 $F=(f_1,\cdots,f_s)$ が事前に与えられているとせよ. このとき,$i<j$ なる添え字 i,j に対して, $S(f_i,f_j)$ を計算し, それを F で割る.
それが 0 でなければ, 余りを f_{s+1} と定義して,F に加える. (つまり,$F=(f_1,\cdots,f_s,f_{s+1})$)
これを繰り返していくのである.
最後に残った F が, イデアル I のグレブナ基底である. このアルゴリズムがいつでも有限回で終了すること, 及び, どんな場合でも最終的にはグレブナ基底を構成されることは示さねばならないことであるが, 省略する.

例を示そう. $f_1=x^3-2xy, f_2=x^2y+x-2y^2$ とし,$I=<f_1,f_2>$ とおく. I のグレブナ基底を（ひとつ）求めてみよう. $F=(f_1,f_2)$ とする. 先に見たとおり,

$$S(f_1,f_2)=-x^2$$

これをわり算アルゴリズムを使って F で割ると, 余りは $-x^2$ となり, これは 0 でない. 故に,$f_3=-x^2$ とおき,$F=(f_1,f_2,f_3)$ とおく. 計算を続ける.

$$S(f_1,f_3)=(x^3-2xy)-(-x)(-x^2)=-2xy$$

であり, これを F で割ったとき余りは $-2xy$ なので, $f_4=-2xy$ とおき $F=(f_1,f_2,f_3,f_4)$ とおく. また,

$$S(f_1,f_4)=-2xy^2=yf^4$$

であり, これを F で割ると余りは 0.

$$S(f_2,f_3)=-2y^2+x$$

であり, これを F で割ると余りは $x-2y^2$ であるので,$f_5=x-2y^2$ と定義し,$F=(f_1,f_2,f_3,f_4,f_5)$ と置く.

$$S(f_1,f_5)=f_1-x^2f_2=2x^2y^2-2xy$$

であり, これを F で割ると余りは $-4y^3$ となるので,$f_6=-4y^3$ とし, これも F に加える. この時,$1\le i<j\le 6$ に対して, $S(f_i,f_j)$ を F で割った余りは 0 となり,F は I のグレブ

ナ基底となる.

ただし, このアルゴリズムの根底にある定理は紹介しておこう (やはり, 証明は省略する).

定理 5 *(ブッフベルガーの S ペア判定条件)*
I をイデアルとする.I の基底 $G=(g_1,\cdots,g_m)$ がグレブナ基底であることは, 全ての添え字 i,j に対して $S(g_i,g_j)$ を G(これには何らかの順序が入っている) で割った余りは 0 であることと同値である.

最後にグレブナ基底の**簡約化**を考えよう. 再び, 前回の例の I を考えるとしよう. このとき, グレブナ基底のひとつは

$$f_1 = x^3 - 2xy$$

$$f_2 = x^2y + x - 2y^2$$

$$f_3 = -x^2$$

$$f_4 = -2xy$$

$$f_5 = x - 2y^2$$

$$f_6 = -4y^3$$

であった. 先頭係数のいくつかは 1 ではないので, 適当な係数をかけて先頭係数を 1 にする. また,$LT(f_1) = -xLT(f_3)$ となるので f_1 をグレブナ基底から取り除くことが出来る. 同様に $LT(f_2) = -(1/2)xLT(f_4)$ なので,f_2 も消去できる. よって,

$$\tilde{f_3} \ = x^2, \tilde{f_4} \ = xy, \tilde{f_5} \ = y^2 - (1/2)x, \tilde{f_6} \ = y^3$$

もまた, I のグレブナ基底であり, 簡約化されたグレブナ基底を得る.

6 連立方程式を解く

それでは, いよいよグレブナ基底を用いて, 連立方程式を解いていこう.
次の連立方程式

$$f_1 = x^2 + y + z - 1 = 0$$

$$f_2 = x + y^2 + z - 1 = 0$$

$$f_3 = x + y + z^2 - 1 = 0$$

を解くことを考える. イデアル $I =< f_1, f_2, f_3 >$ とする. 辞書式順序に関する I のグレブナ基底（変数の順序は $x > y > z$ とする）は

$$g_1 = x + y + z^2 - 1$$

$$g_2 = y^2 - y - z^2 + z$$

$$g_3 = 2yz^2 + z^4 - z^2$$

$$g_4 = z^6 - 4z^4 + 4z^3 - z^2$$

となる (これを確かめよ). ここで,$g_4 = z^2(z-1)^2(z^2+2z-1) = 0$ は z だけを変数に持ち, その解は $z = 0, 1, -1 \pm \sqrt{2}$ である. これらの値を $g_2 = 0, g_3 = 0$ に代入することで y の値が計算でき, 最後に $g_1 = 0$ は対応する x の値を与える.
このようにして, 全ての解を求めることが出来, それらは

$$(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)$$

$$(-1 \pm \sqrt{2}, -1 \pm \sqrt{2}, -1 \pm \sqrt{2})$$

であると分かる.

この例でなぜ, グレブナ基底を求めることで連立方程式が解けたのかを考えてみよう. それは $g_4 = z^6 - 4z^4 + 4z^3 - z^2$ という z だけを変数に持つ多項式がグレブナ基底に含まれているからである. ここで,z は $x > y > z$ という順序のなかで一番小さいものであることにも注意を払っておこう. 実はこれは特別な特別な事ではない. 辞書式順序によるグレブナ基底を計算するとこういう事がよく起こるのである. これについて, 考えてみよう.

簡単のために,x, y, z の 3 変数だけの多項式 $f_1, \cdots, f_m$ を考えてみよう. 変数に順序 $x > y > z$ を仮定しておく.
今, 連立方程式を解くための典型的な方法は, イデアル $I =< f_1, \cdots, f_m >$ の元で z だけからなる多項式を見つけることである. このとき, これの先頭項は当然 z^n の 形（の係数倍）をしているはずであるが, このときその先頭項を, グレブナ基底の元 g が存在して,$LT(g)$ が割り切るはずである. すなわち,$LT(g) = z^s$ の形である. このとき, 多項式 g の先頭項以外の項は z^s よりも順序が低くなるが, 変数順序が $x > y > z$ であるので, そのような項は z だけからなる項であるはずである. すなわち,g は z だけからなる多項式となる.

まとめると, イデアル $< f_1, f_2, \cdots, f_m >$ が z だけからなる多項式を元として持つのであれば,$x > y > z$ なる辞書式順序によるグレブナ基底は z だけからなる多項式 g を含むのである.（z は順序最低の変数 !! ）

これ故に, 連立方程式を解くためにはある辞書式順序によるグレブナ基底を求めればよいのである.

最後に, 第 1 章で示した連立方程式を解いて今回の講義を終わりにしたい. その連立方程式は,

$$f_1 = 3x^2 + 2yz - 2xa = 0$$

$$f_2 = 2xz - 2ya = 0$$

$$f_3 = 2xy - 2z - 2za = 0$$

$$f_4 = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$$

であった. これの解の (x,y,z) を求めたいとしよう.(a は求めなくてよい.) イデアル $I =< f_1, f_2, f_3, f_4 >$ のグレブナ基底を $a > x > y > z$ の順序による辞書式順序で計算すると,

$$a - 3/2x - 3/2yz - 167616/3835z^6 + 36717/590z^4 - 134419/7670z^2$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 1$$

$$xy - 19584/3835z^5 + 1999/295z^3 - 6403/3835z$$

$$xz + yz^2 - 1152/3835z^5 - 108/295z^3 + 2556/3835z$$

$$y^3 + yz^2 - y - 9216/3835z^5 + 906/295z^3 - 2562/3835z$$

$$y^2z - 6912/3835z^5 + 827/295z^3 - 3839/3835z$$

$$yz^3 - yz - 576/59z^6 + 1605/118z^4 - 453/118z^2$$

$$z^7 - 1763/1152z^5 + 655/1152z^3 - 11/288z$$

となり, 一見すると, この多項式の集まりはぞっとしない. しかし, 最後の多項式は (当然の事ながら)z だけからなる多項式であるので, その解は簡単に求まる. この多項式の解は

$$z = 0, \pm 1, \pm\frac{2}{3}, \pm\frac{\sqrt{11}}{8\sqrt{2}}$$

が厳密解であることが分かる. これらの z の値を代入して得られる y, x の値は,

$$z = 0; y = 0; x = \pm 1.$$

$$z = 0; y = \pm 1; x = 0.$$

$$z = \pm 1; y = 0; x = 0.$$

$$z = 2/3; y = 1/3; x = -2/3.$$

$$z = -2/3; y = -1/3; x = -2/3.$$

$$z = \sqrt{11}/8\sqrt{2}; y = -3\sqrt{11}/8\sqrt{2}; x = -3/8.$$

$$z = -\sqrt{11}/8\sqrt{2}; y = 3\sqrt{11}/8\sqrt{2}; x = -3/8.$$

であることが分かる.

参考文献

[1] 著:D. コックス/J. リトル/D. オシー **グレブナ基底と代数多様体入門　上, 下** *2000*
訳:落合啓之/示野真一/西山　享/室 政和/山本敦子 シュプリンガー・ジャパン