

レポートセミナー 問題

問題 1 $(x - a)(x - b) \cdots (x - z)$ を簡単にせよ。

問題 2 6本のマッチ棒を使って、4つの正三角形を作れ。マッチ棒はすべて同じ長さとする。

問題 3 長さが自由の棒が四本ある。次の9つの  を4本の棒により一筆書きで通れ。

問題 4 インク好きの虫が、下の筆算の一部のインクを食べてしまい、数字がわからなくなりました。下の筆算を再現してください。

```
  ×
  -----
-----
  7
```

問題 5 \mathbf{R} を実数全体の集合とする。関数 $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ が $f = g + h$ (g : 偶関数、 h : 奇関数) と一意的に表せることを示せ。ただし $g(-x) = g(x)$ を満たすとき、 g を偶関数、 $h(-x) = -h(x)$ を満たすとき h を奇関数という。

問題 6 n 次正方行列 A に対して、 A の列ベクトルが線形従属であること、すなわち $A = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n]$ としたとき、 $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ が一次従属であることと、 $\det(A) = 0$ であることは同値であることを示せ。ただし、線形代数で習った基本的な公式は用いてよいとする。

問題 7 2次複素正方行列 A に対して、その行列式 $f(A)$ を対応させる写像 f を次の性質を満たすように定義する。

二次ベクトル $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}$ と複素数 k に対して、

性質 (1) f は列に関する線形性を持つ。すなわち

$$f[k\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2] = kf[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2]$$

$$f[\mathbf{a}_1 + \mathbf{b}, \mathbf{a}_2] = f[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2] + f[\mathbf{b}, \mathbf{a}_2]$$

性質 (2) \det は列に関する交代性を持つ。すなわち

$$f[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2] = -f[\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_1]$$

性質 (3) 基本ベクトル $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ に対して、

$$f[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2] = 1$$

このとき、以下にこたえよ。

(1) 上の定義を用いて、二次正方行列 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ に対する $f(A)$ を求めよ。($f(A)$ を f の行列式という。)

(2) 上の行列 A に対して、 A の逆行列 A^{-1} を求めよ。ただし、公式は用いずに f の定義を活用して求めよ。ただし、 $ad - bc \neq 0$

問題 8 行列 A, B に対して、 A, B は可逆でないが、積 AB は可逆である行列 A, B は存在するか考えよ。

問題 9 次の証明は間違っている。間違っている箇所を指摘し、その間違いについて深く考察せよ。(間違いを見つけただけで満足してはいけない!)

$\Phi(x) = \det(xI - A)$ と定義する。(I は単位行列)

このとき、 $\Phi(A) = \det(AI - A) = \det(0) = 0$

であるので、 $\Phi(A) = 0$

問題 10 $1, 2, \dots$ を自然数と呼ぶことにする。自然数から自然数への関数 f が次の性質を持っている。

(1) $f(xy) = f(x) + f(y) - 1$ x, y は自然数

(2) $f(x) = 1$ なる x は有限個しかない

(3) $f(30) = 4$

このとき、 $f(14400)$ を求めよ。

問題 11 $f(x, y, z)$ は x, y, z に関する多項式で、 x については 4 次式であり、次の二つの条件を満たす。このような多項式 $f(x, y, z)$ を一つ求めよ。

$$f(x, z^2, y) + f(x, y^2, z) = 0$$

$$f(z^3, y, x) + f(x^3, y, z) = 0$$

問題 12 ギャンブラーが次のようなゲームをする。コインが表か裏かを当て、当たれば掛け金の倍を取得し、はずれれば掛け金を失う。 $2C$ 円を取得するか破産するまでゲームを続ける。

ただし、掛け金はギャンブラーの持ち金 x が C より小さければ x を、 x が C より大きければ $2C - x$ と決める。

ギャンブラーの持ち金が x 円するとき、最終的に $2C$ 円取得する確率 $f(x)$ を求めよ。

問題 13 $x - y$ 平面の原点を重心とし、一辺の長さが 1 の正三角形を T とするとき、次の積分値を求めよ。ただし、 a, b, c は実数とする。

$$\iint_T (ax^2 + 2bxy + cy^2) dx dy$$

の値を求め、これが T の取り方によらないことを示せ。