微分幾何と相対論

東京理科大学理学部第一部数学科 3 年生 山室孝之

2013/10/13

0.1 はじめに

この講演では一般相対論を学ぶ際に避けては通れない Riemann 幾何学を数学目線で学ぶ. 物理書に書かれている Riemann 幾何学では突如出てくる「テンソル」「クリストッフェル記号」といったものたちに対しては読者に対し「まずは馴れろ」というスタンスが強調されていると思う. それによりテンソルを学び始めた学生達の「テンソルとは何か」という議論が後を絶えない. しかし物理学科においては座標の変換則を用いて共変テンソル、反変テンソルを定義するので少し馴れれば扱えるようになってくるらしい. 一方数学科では $(r.s)$ 次テンソルはある体 K から生成されたベクトル空間 V とその双対空間 V^*に対し、r 個の V と s 個の V^*の積空間から K への線形写像の全体集合と定義するので抽象的な存在としてテンソルを学ぶ.よってテンソルを学びたての数学科の人と物理学科の人がテンソルの話をする時も噛み合ないことがある.ここまでテンソルばかりについて書いているが分かりやすい例として紹介したのであってテンソルに限ったことではない. 本稿ではこのように物理学科や数学科などの学科によって描像が違いうる概念に対し両者を繋ぎ合わせるのが目標である. いわば Riemann 幾何学という学問を多様体のようなようなものとして捉え、Observer1(物理学科) によって観測された描像と Observer2(数学科) によって観測された描像に対する同相写像のようなものに本稿がなってほしいと願ってやまない. アブストラクトにも書いた通り、相対論に掲載されている Riemann 幾何では共変微分など天下りに定義されているものも少なくない。それは Riemann 幾何どころか、多様体論ですら数学科の 3 年生が履修する内容であるから当然話の流れ上仕方のないように思える. 実際本稿では Riemann 多様体の基礎的な知識を仮定して議論を始めるが、初めて学ぶ方のために 0.5 節から 0.8 節まで本稿で必要な程度の Riemann 多様体の基礎的な内容を掲載しておいたので必要に応じて参照されたし. しかしそれをもってしても当然難しい事もあるかもしれないので、よく分からなかった事はその場では fact として 0.4 節を見ても主張は理解できると思う. よく分からなかったところは当日の発表後にいくらでも質問に来てくださって構わない. また稿者の理解不足による誤りまたは誤植を見つけられたら報告して頂けるとありがたい. そして斜体立体の乱用が目立つのはすべて稿者の無知杜撰故であるが誠に申し訳ない. 最後に発表の機会を下さった友人及び先輩方、特に本稿を書く際、浅学な稿者に大変有益な意見を下さった (本稿の査読までしていただいた) 自主ゼミの幾何学クラスタの方々に感謝の意を表わす.

0.2　一般相対論における原理

一般相対論を学ぶ際に要請される 2 つの原理を紹介する.
(i) **一般相対性原理** …物理学の全ての基本法則に関して全ての座標系は同等.
(ii) **等価原理**…適当な座標変換により局所的な無重力空間を作り出すことができる.

上の原理らを数学の言葉で書き換えると以下のようになる.
(i') **一般相対性原理**…物理学を記述する方程式はテンソルの型で書かれる.
(ii') **等価原理**…時空の任意の点に対し十分小さい近傍をとれば局所座標を測地座標系に選ぶことができる.

すなわち一般相対論を学ぶ際に我々はこの 2 つの原理を要請しうる空間を考えなければならない. これを満たすものとして Riemann 接続をもつ Riemann 多様体がある.

0.3　一般相対論のための接続の幾何

まずは多様体上の共変微分から定義する. 尚本稿でも Einstein の規約法を採用する.

多様体 M 上の C^∞ 関数全体集合、C^∞ 接ベクトル場の全体集合、コベクトル場の全体集合、及び (r,s) 次テンソル場の全体集合を $\mathcal{F}(M), \mathcal{X}(M), \mathcal{X}^*(M), \mathcal{T}^r_s(M)$ とかく.議論している多様体が明らかに一意的であれば $\mathcal{F}, \mathcal{X}, \mathcal{X}^*, \mathcal{T}^r_s$ とかくこともある.

Def1 線形接続

M : 多様体, $X, Y, Z \in \mathcal{X}, f \in \mathcal{F}$
次で定義される $\nabla : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ を M 上の**線形接続**といい
(M, ∇) を**線形接続をもつ多様体**という.
(1) $\nabla_X(Y+Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$
(2) $\nabla_X(fY) = f\,\nabla_X Y + (Xf)Y$
(3) $\nabla_{X+Y} Z = \nabla_X Z + \nabla_Y Z$
(4) $\nabla_{fX} Y = f\,\nabla_X Y$

Def2 接続係数

M の局所チャート $(U, \phi = (x_1, \cdots, x_m))$ をとり $\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}$ に対し
$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} =: \Gamma^h_{ij} \frac{\partial}{\partial x^h}$ とおく $(i, j = 1, \cdots, m)$.このとき Γ^h_{ij} を (U, ϕ) における**接続係数**という.

この線形接続の存在性から示そうとすると初学者にとって退屈な時間になってしまうと思うので最初に構造を見てもらいその後に存在証明を見てもらおう.

さて繰り返すがここでは線形接続の存在を認める.

$X, Y \in \mathcal{X}$ の U における局所表現を $X = X^i(\frac{\partial}{\partial x^i}), Y = Y^i(\frac{\partial}{\partial x^i})$ とすると

$$
\begin{aligned}
&\nabla_X Y = \nabla_{X^i(\frac{\partial}{\partial x^i})} Y^j(\frac{\partial}{\partial x^j}) \\
&= X^i \nabla_{(\frac{\partial}{\partial x^i})} Y^j(\frac{\partial}{\partial x^j}) \\
&= X^i(Y^j \nabla_{(\frac{\partial}{\partial x^i})}(\frac{\partial}{\partial x^j}) + (\frac{\partial}{\partial x^i} Y^j)\frac{\partial}{\partial x^j}) \\
&= X^i(Y^j \Gamma^h_{ij} \frac{\partial}{\partial x^h} + \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j}) \\
&= X^i(Y^j \Gamma^h_{ij} \frac{\partial}{\partial x^h} + \frac{\partial Y^h}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^h}) \\
&= X^i(Y^j \Gamma^h_{ij} + \frac{\partial Y^h}{\partial x^i})\frac{\partial}{\partial x^h} \\
&= X^i(\partial_i Y^h + \Gamma^h_{ij} Y^j)\frac{\partial}{\partial x^h} \cdots (*)
\end{aligned}
$$

以降簡略のために $(U, \phi = (x_1, \cdots, x_m)), (V, \psi = (y_1, \cdots, y_m))$ において
$e_i := (\frac{\partial}{\partial x^i}), \bar{e}_i := (\frac{\partial}{\partial y^i})$, とおく.$(i = 1, \cdots, m)$

ここで e_i と $\bar{e}_i$ の関係性を確認しよう.

$U \cap V (\neq \phi)$ において $(\frac{\partial}{\partial y_i})_p = \sum_{j=1}^m \frac{\partial(x^j \circ \psi^{-1})}{\partial y_i}(\psi(p))(\frac{\partial}{\partial x^j})_p = \frac{\partial x^j}{\partial y_i}(p)(\frac{\partial}{\partial x^j})_p$
但し最後の式では Einstein の規約法を使っている.簡略化すれば
$\bar{e}_i(p) = \frac{\partial x^j}{\partial y_i}(p) e_j(p)$ $(p \in U \cap V)$
$\therefore \bar{e}_i = \frac{\partial x^j}{\partial y_i} e_j$
これを用いて接続係数の変換式を求めよう.

$\nabla_{\bar{e}_i} \bar{e}_j = \bar{\Gamma}^h_{ij} \bar{e}_h, \nabla_{e_i} e_j = \Gamma^h_{ij} e_h$ とおくと

$$
\begin{aligned}
&\bar{\Gamma}^h_{ij} \bar{e}_h = \nabla_{\bar{e}_i} \bar{e}_j \\
&= \nabla_{\frac{\partial x^k}{\partial y^i} e_k}((\frac{\partial x^l}{\partial y^j}) e_l) \\
&= (\frac{\partial x^k}{\partial y^i}) \nabla_{e_k}((\frac{\partial x^l}{\partial y^j}) e_l) \\
&= (\frac{\partial x^k}{\partial y^i})((\frac{\partial x^l}{\partial y^j}) \nabla_{e_k} e_l + (e_k(\frac{\partial x^l}{\partial y^j}))(e_l)) \\
&= \frac{\partial x^k}{\partial y^i} \frac{\partial x^l}{\partial y^j} \Gamma^h_{kl} e_h + (\bar{e}_i(\frac{\partial x^l}{\partial y^j}))(e_l) \\
&= \frac{\partial x^k}{\partial y^i} \frac{\partial x^l}{\partial y^j} \Gamma^h_{kl} e_h + (\frac{\partial^2 x^l}{\partial y^i \partial y^j})(e_l) \\
&= (\Gamma^l_{st} \frac{\partial x^s}{\partial y^i} \frac{\partial x^t}{\partial y^j} + \frac{\partial^2 x^l}{\partial y^i \partial y^j}) e_l
\end{aligned}
$$

$\therefore \bar{\Gamma}_{ij}^{h}\bar{e}_h \frac{\partial x^l}{\partial y^h} = (\Gamma_{st}^{l} \frac{\partial x^s}{\partial y^i}\frac{\partial x^t}{\partial y^j} + \frac{\partial^2 x^l}{\partial y^i \partial y^j})e_l \frac{\partial x^l}{\partial y^h}$
$= (\Gamma_{st}^{l} \frac{\partial x^s}{\partial y^i}\frac{\partial x^t}{\partial y^j} + \frac{\partial^2 x^l}{\partial y^i \partial y^j})\bar{e}_h$

$\therefore \bar{\Gamma}_{ij}^{h}\bar{e}_h = \frac{\partial y^h}{\partial x^l}(\Gamma_{st}^{l} \frac{\partial x^s}{\partial y_i}\frac{\partial x^t}{\partial y_j} + \frac{\partial x^l}{\partial y^i \partial y^j})\bar{e}_h$

$\therefore \bar{\Gamma}_{ij}^{h} = \frac{\partial y^h}{\partial x^l}(\Gamma_{st}^{l} \frac{\partial x^s}{\partial y_i}\frac{\partial x^t}{\partial y_j} + \frac{\partial^2 x^l}{\partial y^i \partial y^j})\cdots(**)$
これを**∇の接続係数の変換式**という.

Thm3

$(M, \mathcal{D})$: 多様体, $\mathcal{D} = \{(U_\lambda, \phi_\lambda) | \ \lambda \in \Lambda\ \}$: M の C^∞構造
$\phi_\lambda = (x^1, \cdots, x^m), \phi_\mu = (y^1, \cdots, y^m), \phi_\eta = (z^1, \cdots, z^m), \cdots,$
$\Gamma_{ij}^{h}, \bar{\Gamma}_{ij}^{h}, \tilde{\Gamma}_{ij}^{h}, \cdots : U_\lambda, U_\mu, U_\eta, \cdots$上の C^∞級関数を考える.
$U_\lambda \cap U_\mu \neq \phi$のとき$\bar{\Gamma}_{ij}^{h} = \frac{\partial y^h}{\partial x^l}(\Gamma_{st}^{l} \frac{\partial x^s}{\partial y_i}\frac{\partial x^t}{\partial y_j} + \frac{\partial^2 x^l}{\partial y^i \partial y^j})\cdots(**)$ が成立するとする.$(\forall \lambda, \mu \in \Lambda)$
このとき M 上に線形接続が存在し、U_λにおける∇の接続係数はΓ_{ij}^{h}であり
$\nabla_X Y$ の局所表現は$\nabla_X Y = X^i(\partial_i Y^h + \Gamma_{ij}^{h} Y^j)\frac{\partial}{\partial x^h}$

proof) $(U_\lambda, \phi_\lambda = (x^1, \cdots, x^m)), (U_\mu, \phi_\mu = (y^1, \cdots, y^m)) \in \mathcal{D}(U_\lambda \cap U_\mu \neq \phi$ とする).$X, Y \in \mathcal{X}$ に対し U_λにおける X, Y の局所表現を
$X = X^h \frac{\partial}{\partial x^h}, Y = Y^h \frac{\partial}{\partial x^h}$
U_μにおける X, Y の局所表現を
$X = \bar{X}^h \frac{\partial}{\partial y^h}, Y = \bar{Y}^h \frac{\partial}{\partial y^h}$ とする.

$\bar{X}^i(\frac{\partial \bar{Y}^h}{\partial y^i} + \bar{\Gamma}_{ij}^{h}\bar{Y}^j) = \frac{\partial y^i}{\partial x^l}X^l(\frac{\partial}{\partial y^i}(\frac{\partial y^h}{\partial x^s}Y^s) + \frac{\partial y^h}{\partial x^t}(\Gamma_{su}^{t}\frac{\partial x^s}{\partial y_i}\frac{\partial x^u}{\partial y_j} + \frac{\partial^2 x^t}{\partial y^i \partial y^j})\frac{\partial y^j}{\partial x^u}Y^u)$
$= X^l \frac{\partial}{\partial x^l}(\frac{\partial y^h}{\partial x^s}Y^s) + X^l \frac{\partial y^i}{\partial x^l}\frac{\partial y^h}{\partial x^t}\frac{\partial y^j}{\partial x^u}Y^u(\Gamma_{su}^{t}\frac{\partial x^s}{\partial y^i}\frac{\partial x^u}{\partial y^j} + \frac{\partial^2 x^t}{\partial y^i \partial y^j})$
$= X^s Y^u(\Gamma_{su}^{t}\frac{\partial y^h}{\partial x^t}) + X^l \frac{\partial^2 y^h}{\partial x^l \partial x^s}Y^s + X^l \frac{\partial y^h}{\partial x^s}\frac{\partial Y^s}{\partial x^l} + X^l Y^u \frac{\partial y^i}{\partial x^l}\frac{\partial y^h}{\partial x^t}\frac{\partial y^j}{\partial x^u}\frac{\partial^2 x^t}{\partial y^i \partial y^j}$
$= X^s Y^u(\Gamma_{su}^{t}\frac{\partial y^h}{\partial x^t}) + X^l \frac{\partial y^h}{\partial x^s}\frac{\partial Y^s}{\partial x^l} + X^l Y^s(\frac{\partial^2 y^h}{\partial x^l \partial x^s} + \frac{\partial y^j}{\partial x^l}\frac{\partial y^h}{\partial x^t}\frac{\partial y^i}{\partial x^s}\frac{\partial^2 x^t}{\partial y^i \partial y^j})$

ところで$\frac{\partial x^l}{\partial y^p}(\frac{\partial^2 y^h}{\partial x^l \partial x^s} + \frac{\partial y^j}{\partial x^l}\frac{\partial y^h}{\partial x^t}\frac{\partial y^i}{\partial x^s}\frac{\partial^2 x^t}{\partial y^i \partial y^j})$

$= \frac{\partial^2 y^h}{\partial x^l \partial x^s}\frac{\partial x^l}{\partial y^p} + \frac{\partial x^l}{\partial y^p}\frac{\partial y^j}{\partial x^l}\frac{\partial y^h}{\partial x^t}\frac{\partial y^i}{\partial x^s}\frac{\partial^2 x^t}{\partial y^i \partial y^j}$

$= \frac{\partial^2 y^h}{\partial x^t \partial x^s}\frac{\partial x^t}{\partial y^p} + \frac{\partial x^l}{\partial y^p}\frac{\partial y^j}{\partial x^l}\frac{\partial y^h}{\partial x^t}\frac{\partial^2 x^t}{\partial x^s \partial y^j}$

$= \frac{\partial^2 y^h}{\partial x^t \partial x^s}\frac{\partial x^t}{\partial y^p} + \frac{\partial y^h}{\partial x^t}\frac{\partial^2 x^t}{\partial x^s \partial y^p}$

$= \frac{\partial^2 y^h}{\partial x^s \partial y^p} = 0$

$\therefore \bar{X}^i(\frac{\partial \bar{Y}^h}{\partial y^i} + \bar{\Gamma}{}^h_{ij}\bar{Y}^j) = \frac{\partial y^h}{\partial x^t}(X^s(\frac{\partial Y^t}{\partial x^s} + \Gamma{}^t_{su}Y^u))$

これより U_λ における局所表現 $Z = X^i(\frac{\partial Y^h}{\partial y^i} + \Gamma{}^h_{ij}Y^j)$ をもつベクトル場が存在.

この Z を $\nabla_X Y$ とすると線形接続の定義における条件を全てみたす事が分かる.■

上の線形接続を拡張して共変微分を定義する.

Def4 ベクトル場に関する共変微分

(M, ∇) : 多様体, $X \in \mathcal{X}$,
次で定義される $\nabla_X : \mathcal{T}^r_s \to \mathcal{T}^r_s$ を X に関する**共変微分**といい
$\nabla_X S$ を S の X に関する**共変微分**という.$(S \in \mathcal{T}^r_s)$
(1) $\nabla_X f = Xf (f \in \mathcal{T}^0_0)$
(2) $\nabla_X Y$: 線形接続 $(Y \in \mathcal{T}^1_0)$
(3) $\nabla_X u \in \mathcal{T}^0_1 \Leftrightarrow (\nabla_X u)(Y) = \nabla_X u(Y) - u(\nabla_X Y) (u \in \mathcal{T}^0_1)$
(4) $\nabla_X(S+T) = \nabla_X S + \nabla_X T (S, T \in \mathcal{T}^r_s)$
(5) $\nabla_X(S \otimes T) = (\nabla_X S) \otimes T + S \otimes (\nabla_X T) (S \in \mathcal{T}^r_s, T \in \mathcal{T}^p_q)$

注)$u \in \mathcal{T}^0_1$ に対し $\nabla_X u \in \mathcal{T}^0_1$ である.これは簡単なので演習問題とする.
Hint: $f, g \in \mathcal{F},\ Y, Z \in \mathcal{X}$ に対し $(\nabla_X u)(fY+gZ) = f\nabla_X uY + g\nabla_X uZ$ を示せば良い.

また (∗) より $\nabla_X Y = X^i(\partial_i Y^h + \Gamma{}^h_{ij}Y^j)\frac{\partial}{\partial x^h}$ であるから
$\nabla_i Y = (\partial_i Y^h + \Gamma{}^h_{ij}Y^j)\frac{\partial}{\partial x^h}$ である.
よって $\nabla_i Y^h := (\nabla_i Y)^h = \partial_i Y^h + \Gamma{}^h_{ij}Y^j$

また話を一変し X=$X^i\frac{\partial}{\partial x^i}, Y = Y_i dx^i, Z = Z^i\frac{\partial}{\partial x^i}$ として (局所チャートとして $(U, \phi = (x^1, \cdots, x^m))$ をとっている)

$$
\begin{aligned}
&\nabla_X Y(Z) = \nabla_X(Y(Z)) - Y(\nabla_X Z)\\
&= \nabla_X(Y_i dx^i(Z^j\tfrac{\partial}{\partial x^j})) - Y(X^i(\partial_i Z^h + \Gamma{}^h_{ij}Z^j)\tfrac{\partial}{\partial x^h})\\
&= X(Y_i Z^i) - Y_h X^i(\partial_i Z^h + \Gamma{}^h_{ij}Z^j)\\
&= X^j(Z^i\partial_j Y_i + Y_i\partial_j Z^i) - Y_h X^i(\partial_i Z^h + \Gamma{}^h_{ij}Z^j)\\
&= -Y_h X^i\Gamma{}^h_{ij}Z^j + X^j(\partial_j Y_i)Z^i\\
&= X^j(\partial_j Y_i - Y_h\Gamma{}^h_{ji})Z^i\\
&= X^j(\partial_j Y_k - Y_h\Gamma{}^h_{jk})Z^k\delta{}^i_k\\
&= X^j(\partial_j Y_k - Y_h\Gamma{}^h_{jk})Z^k dx^i(\tfrac{\partial}{\partial x^k})\\
&= X^j(\partial_j Y_k - Y_h\Gamma{}^h_{jk})dx^i(Z)
\end{aligned}
$$

$\therefore \nabla_X Y = X^j(\partial_j Y_k - Y_h \Gamma^h_{jk})dx^i$
$\therefore \nabla_j Y = (\partial_j Y_k - Y_h \Gamma^h_{jk})dx^i$
よって$\nabla_j Y^i := (\nabla_j Y)^i = \partial_j Y_k - \Gamma^h_{jk} Y_h$ となり相対論の教科書に掲載されている「添字の操作」により定義されていた共変微分 (前者が反変ベクトル、後者が共変ベクトル) が数学方向からきちんと導出する事ができた. ここでの接続係数は Christoffel 記号ですらないことに注意！つまり数学における共変微分がより一般性をもったものであることが分かるであろう. 後述の通り、線形接続が Riemann 接続の時に限ってこの接続係数が Christoffel 記号となり相対論における共変微分に話がつながる.

Cor5 簡単な共変微分

$(U, \phi = (x^1, \cdots, x^m))$: 局所チャート, $X \in \mathcal{X}, X = X^i(\frac{\partial}{\partial x^i})$: U における X の局所表現

(1) $\nabla_{X} \frac{\partial}{\partial x^i} = X^j \Gamma^h{}_{ji} \frac{\partial}{\partial x^h}$
(2) $\nabla_X dx^h = -X^j \Gamma^h{}_{ji} dx^i$

proof)
(1) $\nabla_X \frac{\partial}{\partial x^i} = \nabla_{X^j e_j} e_i = X^j \nabla_{e_j} e_i = X^j \Gamma^h{}_{ji} e_h = X^j \Gamma^h{}_{ji} (\frac{\partial}{\partial x^h})$
(2) 先ず$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} dx^i = a_k dx^k$とおく.この係数 a_kを求めよう.
$a_k = (a_k dx^k)(\frac{\partial}{\partial x^k}) = (\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} dx^i)(\frac{\partial}{\partial x^k})$
$= \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} (dx^i \frac{\partial}{\partial x^k}) - dx^i(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} (\frac{\partial}{\partial x^k})) = \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \delta^i{}_k - dx^i(\Gamma^l_{jk}(\frac{\partial}{\partial x^l}))$
$= -\Gamma^l_{jk} \delta^i{}_l = -\Gamma^i_{jk}$
$\therefore \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} dx^i = -\Gamma^i_{jk} dx^k$
$\therefore \nabla_{X^j \frac{\partial}{\partial x^j}} dx^h = X^j \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} dx^h = -X^j \Gamma^h_{jk} dx^k = -X^j \Gamma^h_{ji} dx^i$ ■

Cor

$\nabla_{X+Y} S = \nabla_X S + \nabla_X T,$
$\nabla_{fX} S = f \nabla_X S \quad (X, Y \in \mathcal{X}, f \in \mathcal{F}, S \in \mathcal{T}^r_s)$

proof) 略 (帰納的に示せる.)

Def 6 共変微分

$S \in \mathcal{T}^r{}_s \quad X \in \mathcal{X}$ に対し次を満たす$\nabla S \in \mathcal{T}^r_{s+1}$を S の**共変微分**という.
$(\nabla S)(u_1, \cdots, u_r, X, X_1, \cdots, X_s) = (\nabla_X S)(u_1, \cdots, u_r, X_1, \cdots, X_s)$
$(X_1, \cdots, X_s \in \mathcal{X}, u_1, \cdots, u_r \in \mathcal{X}^*)$

定義より直ちに次を得る.

Cor 共変微分の性質

$S, T \in \mathcal{T}^r{}_s,\ \ P \in \mathcal{T}^p{}_q$ に対し
$\nabla\ (S+T) = \nabla\ S + \nabla\ T,\ \ \nabla\ (S \otimes P) = (\nabla\ S) \otimes P + S \otimes (\nabla\ P)$

演習問題)$\nabla\ f = df$ を示せ.

Def 7 捩率テンソル

(M, ∇) に対し ∇ の捩率テンソル $T : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ を次で定義.
$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] \quad (X, Y \in \mathcal{X})$

Prop 8 捩率テンソルの成分表示

$(U, \phi = (x^1, \cdots, x^m))$ における ∇ の接続係数を $\Gamma^{\,h}_{ij}$ とすれば T の U における成分 T^h_{ij} は $T^h_{ij} = \Gamma^{\,h}_{ij} - \Gamma^{\,h}_{ji}$

proof)
$T^h_{ij} \frac{\partial}{\partial x^h} = T(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j})$
$= \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^i} - [\frac{\partial}{\partial x^i},\ \frac{\partial}{\partial x^j}] = (\Gamma^{\,h}_{ij} - \Gamma^{\,h}_{ji})(\frac{\partial}{\partial x^h})$
$\therefore T^h_{ij} = \Gamma^{\,h}_{ij} - \Gamma^{\,h}_{ji}$ ■

Def 9 対称線形接続

(M, ∇) において ∇ が**対称線形接続**であるとは ∇ の捩率テンソル $T = 0$ であることと定義する.

明らかに次を得る.

Cor 10 対称性と同値な条件

∇ が対称 $\Leftrightarrow \Gamma^{\,h}_{ij} = \Gamma^{\,h}_{ji} (\forall\ (U_\lambda, \phi_\lambda) \in \mathcal{D})$

これより一般相対論に適用するに値する Riemann 接続をもつ Riemann 多様体の定義が出来る.

Def 11 Riemann 接続

次を満たす線形接続 ∇ を (M, g) の **Riemann 接続** (**Levi − Civita 接続**) という.
(1) ∇ : 対称
(2) $\nabla\ g = 0$

注) ここで g とは M 上のRiemann 計量を指し (M,g) を Riemann 多様体という. 多様体 M がパラコンパクトであるなら Riemann 計量の存在は示されるがここでは簡略のため証明しない (気になる方は参考文献 [4] を参照する事). よって Riemann 多様体を考える時は本稿ではその多様体がパラコンパクトである事を要請する. また Riemann 計量、パラコンパクトについて知りたい方は 0.8 節を参照されたし. この性質が相対論における時空を記述するうえで適している事は次の章で触れる.

(2) について同値な条件を導きだそう.

$\nabla\ g=0 \Leftrightarrow \nabla_X g=0(\forall\ X\in\mathcal{X})$ より

$\nabla_X g=\nabla_X g_{ij}dx^i\otimes dx^j$

$=(\nabla_X g_{ij}dx^i)\otimes dx^j+g_{ij}dx^i\otimes(\nabla_X dx^j)$

$=(g_{ij}\nabla_X dx^i+(Xg_{ij})dx^i)\otimes dx^j+g_{ij}dx^i\otimes(-X^k\Gamma^{\ j}_{kl}dx^l)$

$=-g_{ij}X^p\Gamma^{\ i}_{pq}dx^q\otimes dx^j+X^s\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^s}dx^i\otimes dx^j-g_{ij}X^k\Gamma^{\ j}_{kj}dx^i\otimes dx^l$

$=-g_{ij}X^k\Gamma^{\ i}_{kq}dx^q\otimes dx^j+X^k\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}dx^i\otimes dx^j-g_{ij}X^k\Gamma^{\ j}_{kj}dx^i\otimes dx^l$

$=X^k(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}-\Gamma^{\ l}_{ki}g_{lj}-\Gamma^{\ l}_{kj}g_{il})dx^i\otimes dx^j$

$\therefore\nabla\ g=0\Leftrightarrow\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}-\Gamma^{\ l}_{ki}g_{lj}-\Gamma^{\ l}_{kj}g_{il}=0$

(M, g) 上に ∇ が存在すると仮定する.

$\forall\ (U_\lambda,\phi_\lambda=(x^1,\cdots,x^m))\in\mathcal{D}$ に対し U_λ における接続係数を $\Gamma^{\ h}_{ij}$ とすると

(1) より $\Gamma^{\ h}_{ij}=\Gamma^{\ h}_{ji}$

(2) より $\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}-\Gamma^{\ l}_{ki}g_{lj}-\Gamma^{\ l}_{kj}g_{il}=0$

ここで $\Gamma_{ijh}:=\Gamma^{\ l}_{ij}g_{lh}$ とおくと

$\Gamma_{ijh}=\Gamma_{jih}\cdots(i)$

$\Gamma_{kij}+\Gamma_{kji}=\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\cdots(ii)$

(ii) において指標を周期的に動かすと

$\Gamma_{ijk}+\Gamma_{ikj}=\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}\cdots(iii)$

$\Gamma_{jki}+\Gamma_{jik}=\frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j}\cdots(iv)$

$(iii)+(iv)-(ii)$ に (i) を適用

$\Gamma_{ijk}+\Gamma_{ikj}+\Gamma_{jki}+\Gamma_{jik}-\Gamma_{kij}+\Gamma_{kji}=\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}+\frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}$

$\therefore\Gamma_{ijk}=\frac{1}{2}(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}+\frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k})$

$\therefore g_{lk}\Gamma^{l}_{\ ij}=\frac{1}{2}(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}+\frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k})$

$\therefore\Gamma^{\ l}_{ij}=\frac{1}{2}g^{lk}(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}+\frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k})$

$\therefore\Gamma^{\ h}_{ij}=\frac{1}{2}g^{hk}(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}+\frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k})$

$\left\{\begin{array}{c} h \\ ij \end{array}\right\}:=\frac{1}{2}g^{hk}(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}+\frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k})$ を **Christoffel 記号**という.

明らかに$\left\{\begin{array}{c} h \\ ij \end{array}\right\}$は$U_\lambda$内で$C^\infty$級である.以上の事をまとめると次を得る.

Cor 12 Riemann 接続の一意性

(M,g) の上に Riemann 接続∇が存在すれば ただ一つで接続係数は各座標近傍で$\left\{\begin{array}{c} h \\ ij \end{array}\right\}$

さてようやく相対論の本で学ぶ Christoffel 記号が出て来た. しかしこれはまだ存在するか分からない. 今からその存在性を示そう.

Cor 13 Riemann 接続の存在性

(M,g) 上には一つの線形接続∇が存在して接続係数は各座標近傍で$\left\{\begin{array}{c} h \\ ij \end{array}\right\}$(つまり$\nabla$は Riemann 接続)

proof)$(U_\lambda, \phi_\lambda = (x^1, \cdots, x^m)), (U_\mu, \phi_\mu = (y^1, \cdots, y^m)) \in \mathcal{D}$ をとる.
$\left\{\begin{array}{c} h \\ ij \end{array}\right\}_\lambda$: U_λ における g の成分, $\left\{\begin{array}{c} h \\ ij \end{array}\right\}_\mu$: U_μ における g の成分,

簡単のため $\Gamma^{\ h}_{ij} := \left\{\begin{array}{c} h \\ ij \end{array}\right\}_\lambda$ とおくと、

$$\left\{\begin{array}{c} h \\ ij \end{array}\right\}_\mu (\frac{\partial}{\partial y^h}) = \nabla_{(\frac{\partial}{\partial y^i})}(\frac{\partial}{\partial y^j})$$
$$= \nabla_{(\frac{\partial}{\partial y^i})}(\frac{\partial x^t}{\partial y^j}\frac{\partial}{\partial x^t})$$
$$= (\frac{\partial x^t}{\partial y^j})\ \nabla_{(\frac{\partial}{\partial y^i})}(\frac{\partial}{\partial x^t}) + (\frac{\partial}{\partial y^i}\frac{\partial x^t}{\partial y^j})\frac{\partial}{\partial x^t}$$
$$= (\frac{\partial x^t}{\partial y^j})\ \nabla_{(\frac{\partial x^s}{\partial y^i})(\frac{\partial}{\partial x^s})}(\frac{\partial}{\partial x^t}) + (\frac{\partial^2 x^t}{\partial y^i \partial y^j})\frac{\partial}{\partial x^t}$$
$$= \frac{\partial x^s}{\partial y^i}\frac{\partial x^t}{\partial y^j}\Gamma^{\ r}_{st}(\frac{\partial}{\partial x^r}) + (\frac{\partial^2 x^r}{\partial y^i \partial y^j})\frac{\partial}{\partial x^r}$$
$$= \frac{\partial y^h}{\partial x^r}\frac{\partial}{\partial y^h}(\frac{\partial^2 x^r}{\partial y^i \partial y^j} + \Gamma^{\ r}_{st}\frac{\partial x^s}{\partial y^i}\frac{\partial x^t}{\partial y^j})$$

$$\therefore \left\{\begin{array}{c} h \\ ij \end{array}\right\}_\mu = \frac{\partial y^h}{\partial x^r}(\frac{\partial^2 x^r}{\partial y^i \partial y^j} + \Gamma^{\ r}_{st}\frac{\partial x^s}{\partial y^i}\frac{\partial x^t}{\partial y^j})$$

これは Thm3 の $(**)$ を満たすので接続係数が$\left\{\begin{array}{c} h \\ ij \end{array}\right\}$な線形接続が存在する (すなわちRiemann接続が存在).■

Cor12, Cor13 をまとめて次を得る.

Thm 14 Riemann 接続の存在性と一意性

(M,g) 上には常に Riemann 接続∇が存在し一意的.また∇の接続係数は各座標近傍で$\begin{Bmatrix} h \\ ij \end{Bmatrix}$

Thm14 の系として次を得る.

Cor 15 線形接続の存在性

任意の Riemann 多様体上には常に線形接続が存在する.

本節の最後に次節 (一般相対論への橋掛け) のために用いる曲線に沿う共変微分、平行移動の定義及び性質を述べる.
多様体上の C^∞曲線 $c: I \to M$ に対し$\dot{c}: c(I)(\subset M) \to T_{c(I)}M$ より $c(t)$ の局所チャートとして $(U, \phi = (x_1, \cdots, x_m))$ をとると$\dot{c} = \frac{dx^i}{dt}\frac{\partial}{\partial x^i}, X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ とかけ,

$\nabla_{\dot{c}} X(c(t)) = \frac{dx^i}{dt} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} X^j(c(t)) \frac{\partial}{\partial x^j}$
$= \frac{dx^i}{dt}(X^j(c(t))\ \Gamma^{\,h}_{ij} \frac{\partial}{\partial x^h} + \frac{\partial X^j(c(t))}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j})$
$= \frac{dx^i}{dt}(X^j(c(t))\ \Gamma^{\,h}_{ij} + \frac{\partial X^h(c(t))}{\partial x^i}) \frac{\partial}{\partial x^h}$
$= (\frac{dx^i}{dt} X^j(c(t))\ \Gamma^{\,h}_{ij} + \frac{\partial X^h(c(t))}{\partial t}) \frac{\partial}{\partial x^h}$

この$\nabla_{\dot{c}} X$ を**曲線 c に沿っての共変微分という**.

Def 16 曲線に沿う平行性

$c: M$ 上の C^∞曲線, $X \in \mathcal{X}$ に対し
$\nabla_{\dot{c}} X = 0$ であるとき X は**曲線 c に沿って平行**であるという.

改めて述べれば、c に沿うベクトル場 ξが c に沿って平行であるとは局所チャート $(U, \phi = (x^1, \cdots, x^m))$ における局所表現
$\xi = \sum_{i=1}^m \xi^i (\frac{\partial}{\partial x^i}{}_{c(t)})$ とおいたときの成分$\xi^1(c(t)), \cdots \xi^m(c(t))$ が次の連立線形常微分方程式系の解であるということである.
$\frac{dx^i}{dt} \xi^j(c(t))\ \Gamma^{\,h}_{ij} + \frac{\partial \xi^h(c(t))}{\partial t} = 0 (h = 1, \cdots, m) \cdots (***)$

更に線形接続をもつ多様体について考える (注: Riemann 接続ではない).
M 上の C^∞曲線 $c(t)$ のパラメータを一つ固定する (これをτとする。) このとき $(***)$ の解の存在性と一意性より $v \in T_{c(\tau)}M$ に対し$\xi_x(\tau) = v$ なる c に沿う平行ベクトル場が一意的に存在.$(***)$ では $c|_U$での議論 (局所的) なので全域について言及していないが適当に曲線の定義域を細分し $(***)$ を用いれば初期ベクトルに対し平行なベクトル場の存在性と一意性が分かる.これを$\xi_{v,\ \tau}$ とおくと v, τ に関して C^∞級でかつ線形方程式の解なので v に

関して線形

i.e. $\xi_{\alpha\ u+\beta\ v,\ \tau}(t) = \alpha\xi_{u,\ \tau}(t) + \beta\xi_{v,\ \tau}(t)(\alpha, \beta \in \mathbf{R}, u, v \in T_{c(\tau)}M, t \in I)$

Def 17 曲線に沿う平行移動

> C^∞級曲線 $c : I \to M$, $\tau, t \in I$ に対し
> 線形写像 $\prod(c; \tau, t)\ :\ T_{c(\tau)}M \to T_{c(t)}M$ を次で定義し、曲線 c に沿う**平行移動**という.
> $\prod(c; \tau, t)(v) = \xi_{v,\ \tau}$

$\prod(c; \tau, t)$ と $\prod(c; t, \tau)$ を合成すれば定義より明らかに $T_{c(\tau)}M$ の恒等写像になるので曲線に沿う平行移動は線形同形である.

よって τ を任意に固定して $T_{c(\tau)}M$ の基底 $\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x^m}\}$ に対し

$E_i(t) := \prod(c; \tau, t)(\frac{\partial}{\partial x^i})(t \in I)$ とおけば $\{E_i(t) | t = 1, \cdots, m\}$ は c に沿う平行なベクトル場かつ $T_{c(\tau)}M$ の基底となる.

従って $\nabla_{\dot{c}}E_i = 0(i = 1, \cdots, m)$ であり、c に沿うベクトル場 $\xi(t) = \sum_{i=1}^m \xi^i(t)E_i(t)$ ($\xi^i \in C^\infty((a, b))$) と一意的に表せる.

$\therefore \nabla_{\dot{c}}\xi = \nabla_{\dot{c}}(\sum_{i=1}^m \xi^i(t)E_i(t))$

$= \sum_{i=1}^m (\frac{d\xi^i}{dt}E_i + \xi^i\nabla_{\dot{c}}E_i)$

$= \sum_{i=1}^m \frac{d\xi^i}{dt}E_i$

また $\prod(c; s, t)(E_i(s)) = E_i(t)$ より

$$\nabla_{\dot{c}}\xi(t) = \sum_{i=1}^m \lim_{s\to t}\frac{\xi^i(s) - \xi^i(t)}{s - t}\mathrm{E}_i(t)$$

$$= \lim_{s\to t}\frac{\sum_{i=1}^m(\xi^i(s)\prod(c; s, t)(E_i(s)) - \xi^i(t)E_i(t))}{s - t}$$

$$= \lim_{s\to t}\frac{\prod(c; s, t)(\xi(s)) - \xi(t)}{s - t}$$

$$= \frac{d}{ds}\prod(c; s, t)(\xi(s))(s = t)$$

また $\nabla g = 0 \Leftrightarrow X(g(Y, Z)) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$(後者を ∇ は g と**整合している**という) である (成分計算をすれば明らか).

0.4　一般相対論への橋掛け

さて Riemann 接続をもつ Riemann 多様体が何故時空を記述する上で適しているかを見て行こう.

長々と書いて主張を捉えづらいということにならないように Riemann 接続の性質から導きだされる描像 (結果) をまず先に述べる.

(1) $\nabla g = 0$ ⇔ベクトルの長さが平行移動不変.

(2) ∇:対称⇔捩率 0(torsion free) ⇔ 2 通りの平行移動で生じる位置のずれが 0 である.

先に結論を述べたがこれを示そう.

(1) と同値な条件 $X(g(Y,Z)) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$ を用いれば、曲線 c に沿うベクトル場 X, Y に対し、
$\frac{d}{dt}g(X,Y) = g(\nabla_{\dot{c}}X, Y) + g(X, \nabla_{\dot{c}}Y)$ が成立するので

$u, v \in T_{c(\tau)}M$ に対し $\frac{d}{dt}g(\prod(c;\tau,t)(u), \prod(c;\tau,t)(v))$
$= g(\nabla_{\dot{c}}\prod(c;\tau,t)(u), \prod(c;\tau,t)(v)) + g(\prod(c;\tau,t)(u), \nabla_{\dot{c}}\prod(c;\tau,t)(v))$
$= 0$
$\therefore g(\prod(c;\tau,t)(u), \prod(c;\tau,t)(v))$ は一定 (t に依らない).
∴曲線に沿う平行移動によって内積が不変.
∴平行移動によってベクトルの長さは不変.

(2) について理解するためにまず共変微分の直感的な意味を模索しよう.
M 上の局所チャート (U,ϕ) に対して $\phi(p) = (x^1, \cdots, x^m), \phi(q) = (x^1 + dx^1, \cdots, x^m + dx^m)$ となるような多様体 M 上の点 p, q をとる.ここでベクトル場 $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ に対し普通の微分のようなものを考える.
$\frac{\partial X^i}{\partial x^j}(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \dfrac{1}{\Delta x^j}\{X^i(x + \Delta x) - X^i(x)\}$
これは右辺第 2 項が $(x^1, \cdots, x^m)$ である点 p での値を表し、第 1 項が $(x^1 + \Delta x^1, \cdots, x^m + \Delta x^m)$ である点 p' の値を表す.$(p \neq p')$
よって $\dfrac{\partial X^i}{\partial x^j}(x)$ は座標系の変換の際にテンソルの変換則に従わない.この欠点を解消するには座標系の選び方に依らずに p での量 $X^i(x)$ を p' に移動しなくてはならない.

$\mathrm{X}_{||}(x + dx)$ を線形接続を用いて以下で定義.
$X^h_{||}(x + dx) = X^h(x) - \Gamma^{\,h}_{ij}(x)dx^i X^j(p)$
このようにおくと次が分かる.
$\frac{X^h(x+dx) - X^h_{||}(x+dx)}{dx^i} = \partial_i X^h + \Gamma^{\,h}_{ij}X^j = \nabla_i X^h$

ベクトル場 Y, Z に対し $\nabla_Y Z$ はベクトル場になっているので座標系の変換の際にテンソルの変換則に従う.直感的な解釈としては上式の左辺の第 1 項 ,第 2 項ともに q での量であるからテンソルの変換則であるということである.ここで $X_{||}(x + dx)$ を p から q に X を**平行移動したベクトル場**と呼ぶことにする.共変微分とは p におけるベクトル場を q に平行移動したベクトル場から q におけるベクトル場を引いたものの極限であると解釈できる.さてtorison freeなことの意味を探ろう.
2 つの微小移動 dx^h, dx'^h を考える.まず dx^h 移動してから dx'^h 移動する事を考える.このとき始点に対し dx^h 移動しているので dx'^h は dx^h だけ平行移動させる必要がある。$i.e.\ dx^h + (dx'^h + \Gamma^{\,h}_{ij}dx^i dx'^j)$

逆に dx'^h移動してから dx^h移動させると $dx'^h + (dx^h + \Gamma^{\,h}_{ij} dx'^i dx'^j)$
差をとると $(\Gamma^{\,h}_{ij} - \Gamma^{\,h}_{ji}) dx^i dx'^j$ となる.よってtorsion freeならばこれは 0 になるので微小移動の順番を変えても 1 次近似で同じ点に移動するということである.(これはtorsion freeな多様体上で 2 通りの平行移動を行えば平行四辺形を形成するということである.) 逆をいえばtorsion freeでなければ 2 通りの平行移動した先は一致しない.例えばメビウスの輪では平行移動の順番によってベクトル場の向きが逆になることもある.またクラインの壷でも同様の事が分かる.どちらも自己交差している (日常語で表現すれば捩じれている).これより捩率とは多様体の捩じれ具合を表現している事が分かるであろう (しかしここでは平行移動という言葉が二つ出てきており混乱を与えているかもしれないので言及しておくが参考文献 [5] ではきちんと曲線に沿った平行移動を用いて共変微分の上と同様の解釈が出来ているしさらに数学的に厳密に記述されている.そちらを採用して一貫性のある話をここに書きたかったが [5] の方法だと $\nabla\ g = 0$ だけでなくtorsion freeなことをも用いてベクトルの長さが不変である事を示しており稿者の理解不足故,torison freeなことを用いない証明への翻訳が出来なかった.すなわち $\nabla\ g = 0$ であること特有の意味を [5] の方針では示せなかった.従って前者は曲線に沿った平行移動,後者はその一次近似の平行移動という立場で記述している.発表日までに一定の見解を得られればそれについて発表時に正しい解釈を与えたい).

とうとう Riemann 接続の性質から導きだされる描像 (結果) を得る事ができた.

以下特記しない限りRiemann多様体というとRiemann接続をもつRiemann多様体ということとする.よってRiemann接続の性質をみるとRiemann多様体は座標系 (平行移動含む) によって物理的量が変わらないという相対論の主張に矛盾しないものであることがわかる.

さらに一般相対論における 2 つの原理の一つの等価原理の本質である測地座標系の定義を述べる。するとさらにRiemann多様体が一般相対論における時空に適用される理由が分かるだろう.

Def 18 測地座標系

$p \in (M, g)$ の局所チャート $(U, \phi = (x^1, \cdots, x^m))$ をとる.
$(x^1, \cdots, x^m)$ が p を中心とする**測地座標系**であることを次で定義.
$\left\{ \begin{matrix} h \\ ij \end{matrix} \right\}_p = 0$(但し $\left\{ \begin{matrix} h \\ ij \end{matrix} \right\}$: U における Christoffel 記号)

Cor 19 測地座標系と同値な条件

上の定義は次と同値.$(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k})=0$

proof) $\nabla g=0$ より $\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}-\Gamma^{\,l}_{ki}g_{lj}-\Gamma^{\,l}_{kj}g_{il}=0$

$\Leftrightarrow \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}=\Gamma^{\,l}_{ki}g_{lj}+\Gamma^{\,l}_{kj}g_{il}=\left\{\begin{matrix} l \\ ki \end{matrix}\right\}g_{lj}+\left\{\begin{matrix} l \\ kj \end{matrix}\right\}g_{il}$

$\therefore g_{ij}:const \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} h \\ ij \end{matrix}\right\}=0$ ■

Prop 20

$\forall\, p\in(M,g)$ に対し、p を含む十分小さい局所チャート $(U,\phi=(x^1,\cdots,x^m))$ をとれば $(x^1,\cdots,x^m)$ を p を中心とする測地座標系とできる.

proof) $\forall\, p\in M$ に対し p の局所チャート $(U,\phi=(x^1,\cdots,x^m))$ を任意にとる.

$\left\{\begin{matrix} h \\ ij \end{matrix}\right\}:(U,\phi)$ におけるChristoffel 記号, $p=(x_0^1,\cdots,x_0^m)$ をとる.

$y^h:=x^h-x_0^h+\frac{1}{2}\left\{\begin{matrix} h \\ ij \end{matrix}\right\}_p(x^j-x_0^j)(x^i-x_0^i)$ とおく.

このとき、$(\frac{\partial y^h}{\partial x^i})_p=\delta^{\,h}_{\,i},|\frac{\partial y^h}{\partial x^i}|_p=1\neq 0,(\frac{\partial^2 y^h}{\partial x^j\partial x^i})_p=\left\{\begin{matrix} h \\ ij \end{matrix}\right\}_p$

これより $|\frac{\partial y^h}{\partial x^i}|_p\neq 0$ より p の近傍$\bar{V}(\subset U)$ を十分小さくとれば $(\bar{V},(y^1,\cdots,y^m))$ を p の局所チャートとできる.

$\left\{\begin{matrix} h \\ ij \end{matrix}\right\}_V$:V における Christoffel 記号 とすると $U\cap\bar{V}$において

$\left\{\begin{matrix} h \\ ij \end{matrix}\right\}_V=\frac{\partial y^h}{\partial x^r}\frac{\partial}{\partial y^h}(\frac{\partial^2 x^r}{\partial y^i\partial y^j}+\left\{\begin{matrix} r \\ st \end{matrix}\right\}\frac{\partial x^s}{\partial y^j}\frac{\partial x^t}{\partial y^j})$

$\left\{\begin{matrix} h \\ ij \end{matrix}\right\}_{V\,p}=\delta^{\,h}_{\,r}(\delta^{\,s}_{\,i}\delta^{\,t}_{\,j}\left\{\begin{matrix} r \\ st \end{matrix}\right\}_p)=0$ ■

この命題の主張する事はRiemann 多様体上における任意の点において、その十分小さい近傍をとれば測地座標系とできるということである.
では何故測地座標系をとれるということと局所的慣性系をとれるということが繋がるのかを述べたい.Riemann 多様体における曲がり具合を表す量として曲率テンソル、Ricci テンソル、スカラー曲率という 3 つのものがある.

Def 21 曲率テンソル、Ricci テンソル、スカラー曲率

次を満たす $K:\mathcal{X}\times\mathcal{X}\times\mathcal{X}\to\mathcal{X}$ を (M,g,∇) の**曲率テンソル**という.
$K(X,Y,Z):=K(X,Y)Z$
$=\nabla_X\nabla_YZ-\nabla_Y\nabla_XZ-\nabla_{[X,Y]}Z\quad(X,Y,Z\in\mathcal{X})$
このとき $K\in\mathcal{T}_3^1$であり (証明略)
また曲率テンソルの成分

$$K^l_{ijh}=\frac{\partial}{\partial x^i}\left\{\begin{array}{c}l\\jk\end{array}\right\}-\frac{\partial}{\partial x^j}\left\{\begin{array}{c}l\\ik\end{array}\right\}$$

$$+\left\{\begin{array}{c}s\\jk\end{array}\right\}\left\{\begin{array}{c}l\\is\end{array}\right\}-\left\{\begin{array}{c}s\\ik\end{array}\right\}\left\{\begin{array}{c}l\\js\end{array}\right\}$$

(証明略 : 8 行程度の計算で得られる)
$Ric:=K_{ij}dx^i\otimes dx^j(K_{ij}:=K^m_{mij})$ を **Ricci スカラー**
$R:=g^{ij}K_{ij}$: **スカラー曲率**
と定義する.

例えば $\mathbf{R}^m$,Minkowski 空間 (Minkowski 多様体) の Riemann 計量はそれぞれ $\delta^{\ i}_{j},\eta^\nu_\mu(\eta^\mu_\mu=1(\mu=1,2,3),\eta^4_4=-1,\eta^\nu_\mu=0(other))$ であるからそれぞれの計量は $const$ でありCor18 よりこれは Chrisoffel記号が 0 であるということで K の成分は全て 0
∴ Euclid 空間、Minkowski 空間 において K=0, Ric=0, R=0
これは Euclid 空間も Minkowski 空間も曲がっていない空間である事を示唆している.

ここでRiemann多様体における性質である任意の点に対し座標近傍を十分小さくとれば測地座標系とみなせるという性質を見直そう.
多様体の任意の点に対し座標近傍を十分小さくとれば測地座標系とみなせる
⇔多様体の任意の点の十分小さい近傍上でChristoffel記号が 0
⇔多様体の任意の点に対し十分小さい近傍上でRiemann計量が $const\Rightarrow K=0,Ric=0,R=0$
Riemann多様体は局所的に見れば曲がっていない空間であるとみなせる (それはこの地球は球状をしているが我々がいる場所付近が平坦に見なせるのと同じ理由).
これは一般相対論においては重力によって曲がった空間を考えていたのだから一般相対論における原理の一つである「適当な座標変換により局所的に無重力空間を作り出すことができる」ということを言っているのである.
またもう一方の原理「物理を記述する方程式はすべてテンソルの型で書かれる」は多様体でこそ適任な要請と言えよう.

4 章の話の流れをまとめると Riemann 接続の定義における要請は相対論的考え方を否定しないものであり、実際 Riemann 接続をもつ Riemann 多様体

の考察を行うと一般相対論における要請を満たすようなものであるということがわかったということである.
実は Riemann 多様体だけでは一般相対論の全てを記述しえないことが分かっているらしい (すなわち時空は Riemann 多様体に限らない) が Riemann 多様体が一般相対論を考える際の基本モデルな空間である事は理解されたと思う.
故に我々は一般相対論を学ぶ際に Riemann 幾何学を学ぶのだ.

0.5 補足 1: 多様体の基礎

$\mathbf{R}^m$上には標準位相が入っているとして話を進める.$\mathbf{R}^m$における標準位相によって定まる開集合をここでは標準開集合と呼ぶことにする.

Def0.1 ε-近傍・開集合・位相

$x \in \mathbf{R}^m$, $\varepsilon > 0$ に対し $B(x, \varepsilon)(\subset \mathbf{R}^m) = \{y \in \mathbf{R}^m | d(x,y) < \varepsilon\}$ を $\mathbf{R}^m$ における **$\boldsymbol{\varepsilon}$-近傍**という. また $A \subset \mathbf{R}^m$が**標準開集合**であるとは $\forall x \in A, \exists \varepsilon > 0, B(x, \varepsilon) \subset A$ を満たすことを言う.標準開集合の冪集合を $\mathbf{R}^m$の**標準位相**といい、$\mathcal{O}_m$とかく.

但し $x, y \in \mathbf{R}^m$に対し $d : \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}$ $s.t.$ $d(x,y) = \sum_{i=1}^m (x_i - y_i)^2$

位相空間 X が **Hausdorff 空間** であるとは X の任意の点 x,y(但し x $\neq$ y) に対し x, y の開近傍 U, V で U $\cap$ V=ϕ となるものがとれることをいう.

注) 位相空間についての細かい事は書くと長くなるので既知として話す. 詳しく学びたい方は参考文献を参照されたし.

Def 0.2 多様体

Hausdorff 空間 M が **$\mathbf{C}^r$多様体**であるとは M の開被覆 $(U_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$の元 U_λ に対し同相写像ϕ_λ : $U_\lambda \to O_\lambda (\in \mathcal{O}_m)$ が存在 $(\lambda \in \Lambda)$ かつ $U_\lambda \cap U_\mu \neq \phi$ $(\lambda \neq \mu \in \Lambda)$ のとき$\phi_\lambda \circ \phi_\mu^{-1}$が C^r級であることをいう. またこのとき $\mathcal{D} = (U_\lambda, \phi_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$を M の **$\mathbf{C}^r$構造**といい C^r構造の各元 $(U_\lambda, \phi_\lambda)$ を M の**局所チャート**という.多様体は C^r構造によって構成される意味をこめて $(M, \mathcal{D})$ を多様体という事もある.

注 1) 以下 M は m 次元 C^r多様体、N は n 次元 C^r多様体とし、特記する必要のない場合は C^∞多様体を単に多様体と呼ぶ.

注 2) $p \in M, p$ を含む局所チャート $(U_\lambda, \phi_\lambda)$ に対し$\phi_\lambda(p) = (x^1(p), \cdots, x^m(p))$ のようにかける $(x^i : U_\lambda \to \mathcal{O}_1 : C^\infty$級 $(i = 1, \cdots, m))$ ので $(U_\lambda, \phi_\lambda = (x^1, \cdots, x^m)$ のようにかくことがある.

さて教科書を読めば多様体においては座標が入っている解釈が目立つが実際どういうことなのかを考察してみよう. 一般の想像し難い (Euclid 空間に埋め込まれているとは限らない) 多様体の場合、解析性を要求するとき多少の工夫が必要である. その工夫のコツとなるのは定義を見れば明らかだが Euclid 空間の開集合への同相写像が C^r級であることである. つまり Euclid 空間上で見た挙動に対する解析性を考慮すれば大学初年度程度の解析学の知識を応用してよい理論が出来そうであるし現に出来ている. すなわち同相写像によって移った Euclid 空間上で解析性を考えるのであたかも多様体に座標が入って

いるかのように考えるのだ. 一方このような定義を与えると「ある関数値が座標系 (局所チャート) によって異なる値をとるのではないか」という疑問が涌くかもしれない. 例えば交わった座標系 U, V における同じ点において微分値が異なるなどあれば最早多様体に解析性を要求するのは困難であるし豊富な構造を持っているとは言い難い. 我々は多様体論という学問において多様体の座標系の取り方に依らない (つまり well-defined である) 性質を探求するのだが、ここでも実際に微分写像や線形接続、共変微分などといった物理的にも意味のある写像が well-defined であることを見ていくのと兼ねて多様体の基礎論を学んでいこう.

Euclid 空間上の曲面の接平面は曲面上の曲線を微分する事により得られるので自然な論理の飛躍には気づくだろう. つまり多様体上の曲線を定義すれば良いわけだ.

Def 0.3 多様体上の曲線

$c : I := [a, b](\neq \phi) \to M$ が M 上の $\mathbf{C}^r$**曲線**であるとは、$\forall\ p$ に対し p を含む座標近傍 U_λ が存在し $\phi_\lambda \circ c : I \to \mathbf{R}^n$ が C^r 級である事をいう. また $p \in M$ に対し $\mathcal{C}_p := \{c | c$ は p を通る C^∞ 曲線 $\}$ とおく.

当然だが以下が成立.

Cor. 多様体上の曲線とその C^r 級性

多様体上の曲線が C^r 級 である事は well-defined

proof)$p \in U_\lambda \cap U_\mu$ に対し $\frac{d(\phi_\lambda \circ c(t))}{dt} = \frac{d(\phi_\mu \circ c(t))}{dt}$ より明らか■

さて多様体上の曲線の微分性は現時点では Euclid 空間に引き戻した空間曲線の微分性でしか与えられていない. すなわち何をもってして多様体上の曲線の微分値とすれば良いか考える必要がある. ここでやはり多様体の性格上必然的に Euclid 空間に引き戻した空間曲線の微分性を用いるのが妥当であろう (定義の方法は他にもある).

Def 0.4 接ベクトル

M 上の曲線 $c, \bar{c} : [a, b] \to M$、$p \in U_\lambda$ に対し $c(t_1) = \bar{c}(t_2)$ かつ $\frac{d(\phi_\lambda \circ c(t))}{dt}|_{t=t_1} = \frac{d(\phi_\lambda \circ \bar{c}(t))}{dt}|_{t=t_2}$ であるとき $(c, t_1) \sim (\bar{c}, t_2)$ と定義する.$T_pM := \mathcal{C}_p/_\sim = \{c'(t_0) | c : M$ 上の曲線で $c(t_0) = p\}$ を M 上の接空間という.

Cor 接ベクトルの well-defined 性

上の定義は well-defined である. すなわち局所チャートの取り方に依らない.

proof) $c_1(t_1) = \bar{c}(t_2)$ のまわりの局所チャートとして $(U_\lambda, \phi_\lambda = (x^1, \cdots, x^m)), (U_\mu, \phi_\mu = (y^1, \cdots, y^m)$ をとる.
$\frac{d(\phi_\lambda \circ c(t))}{dt}|_{t=t_1} = \frac{d(\phi_\lambda \circ \bar{c}(t))}{dt}|_{t=t_2} \Leftrightarrow \frac{d(x^i \circ c(t))}{dt}|_{t=t_1} = \frac{d(x^i \circ \ \bar{c}(t))}{dt}|_{t=t_2} (i = 1, \cdots, m)$
このとき $\frac{d(y^i \circ c(t))}{dt}|_{t=t_1} = \sum_{j=1}^m \frac{\partial(y^i \circ \phi^{-1})}{\partial x^j}|_{\phi(c_1(t))} \frac{d(x^j \circ c(t))}{dt}|_{t=t_1} = \frac{d(y^i \circ \bar{c}(t))}{dt}|_{t=t_2}$
逆も同様■
注) $\forall$ v $\in \mathrm{T}_p M \quad s.t. \quad v = c'(t_0)$ は$\hat{c}(t) := c(t + t_0)$ とおけば $v = \hat{c}'(0)$ とかけるので以降$\forall \ v \in T_p M$ は $v = c'(0)$ とかく.

$T_p M$ における和と実数倍を次のように定義
$v_1, v_2 \in T_p M, (v_i := c_i'(0)(i = 1, 2)), \alpha \in \mathbf{R}$
$v_1 + v_2 := \bar{c}'(0)$ (但し$\bar{c}(t) := \phi^{-1}(\phi(c_1(t)) + \phi(c_2(t)))$ とおく)
$\alpha \ v_1 := \hat{c}'(0)$ (但し$\hat{c}(t) = \phi^{-1}(\alpha \phi(c_1(t)))$ とおく)

この和とスカラー倍の定義は well-defined であり、$\mathrm{T}_p M$ はこの和とスカラー倍に関してベクトル空間をなすが証明はそこまで大変なものではないので演習問題にさせて頂く.

ここで誰しもが思う事は $\mathrm{T}_p M$ というベクトル空間の基底とは何かということである.

Def0.5 自然基底

M の局所チャートとして $(U_\lambda, \phi_\lambda = (x_1, \cdots, x_m)), p \in U_\lambda$ をとる.
$c_i(t) := \phi_\lambda^{-1}(x^1(p), \cdots, x^i(p) + t, \cdots, x^m(p))$ に対し
$(\frac{\partial}{\partial x^i})_p := c_i'(0)$ を $(U_\lambda, \phi_\lambda)$ の p における**自然基底**という.

Cor

$\{(\frac{\partial}{\partial x^1})_p \cdots, (\frac{\partial}{\partial x^m})_p\}$ は $T_p M$ の基底である.

proof)(i) 一次独立性
平行移動をすればよいだけなので$\phi(p) = (0, \cdots, 0)$ としてよい. $\sum_{i=1}^m \alpha_i (\frac{\partial}{\partial x_i})_p = 0_{T_p M}$ とする.

$\mathrm{c}_i(t) = \phi^{-1}(x^1(p), \cdots, x^i(p) + t, \cdots, x^m(p)) = \phi^{-1}(0, \cdots, t, \cdots, 0)$ より $\hat{c}(t) := \phi^{-1}(\sum_{i=1}^m \alpha_i \phi(c_i(t)))$ とおくと

$\hat{c}'(0) = \sum_{i=1}^m \alpha_i (\frac{\partial}{\partial x^i})_p = 0_{T_p M}$ から

$\frac{d\phi(\hat{c}(t))}{dt}|_{t=0} = \frac{d}{dt}|_{t=0}(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \phi(c_i(t)))$

$= \frac{d}{dt}|_{t=0}(\alpha_1 t, \cdots, \alpha_m t) = (\alpha_1, \cdots, \alpha_m)$

また $C_p(t) := p(\forall\ t)$ とおけば $C_p'(0) = 0_{T_pM}$ より $C_p'(0) = \hat{c}'(0)$ であるから

$(\alpha_1, \cdots, \alpha_m) = \frac{d\phi(\hat{c}(t))}{dt}|_{t=0} = \frac{d\phi(C_p(t))}{dt}|_{t=0} = (0, \cdots, 0)$

(ii)生成性

$\forall\ v \in T_pM$ に対し $\frac{d}{dt}|_{t=0}(\phi(c_i(t)) = (0, \cdots, 1, \cdots, 0)$ より (1 の位置は i 番目)

$\frac{d}{dt}|_{t=0}(\phi(c(t))) = (\frac{d(x^1(c(t)))}{dt}|_{t=0}, \cdots, \frac{d(x^m(c(t)))}{dt}|_{t=0}) = \sum_{i=1}^{m} \frac{d(x^i(c(t)))}{dt}|_{t=0} \frac{d(\phi(c_i(t)))}{dt}|_{t=0}$

ここで $\hat{c}(t) := \phi^{-1}(\sum_{i=1}^{m} \frac{d(x^i(c(t)))}{dt}|_{t=0}\phi(c_i(t)))$ とおくと、$\hat{c}'(0) = \sum_{i=1}^{m} \frac{d(x^i(c(t)))}{dt}|_{t=0}(\frac{\partial}{\partial x^i})_p$ となる。

また $\frac{d}{dt}|_{t=0}(\phi(c(t))) = \frac{d}{dt}|_{t=0}(\sum_{i=1}^{m}(\frac{d}{dt}|_{t=0}(\phi(c(t))))\phi(c_i(t))) = \frac{d\phi(\hat{c}(t))}{dt}|_{t=0}$

$\therefore v = c'(0) = \hat{c}'(0) = \sum_{i=1}^{m} \frac{d(x^i(c(t)))}{dt}|_{t=0}(\frac{\partial}{\partial x_i})_p$ ■

またこれより明らかに次を得る.

Prop 0.6

$c'(0) = \sum_{i=1}^{m} \frac{d(x^i(c(t)))}{dt}|_{t=0}(\frac{\partial}{\partial x_i})_p$

(但し $c(0) = p$ で $(U, \phi = (x^1, \cdots, x^m))$ は p のまわりの局所チャート)

次に T_pM の接ベクトルの基底間の変換則を求める.

Prop 0.7

$(U, \phi = (x^1, \cdots, x^m)), (V, \psi = (y^1, \cdots, y^m)) : p$ のまわりの局所チャート,

$(\frac{\partial}{\partial x^i})_p = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial(y^j \circ \phi^{-1})}{\partial x^i}(\phi(p))(\frac{\partial}{\partial y^j})_p$

proof)

平行移動すればよいだけなので $\phi(p) = (0, \cdots, 0)$ の場合を示せればよい.

$c_i(t) = \phi^{-1}(x^1(p), \cdots, x^i(p) + t, \cdots, x^m(s)) = (0, \cdots, t \cdots, 0)$(但し t は i 成分)

として $c_i'(0) = (\frac{\partial}{\partial x^i})_p$ となる.

Prop 0.6 より $c_i'(0) = \sum_{j=1}^{m} \frac{d(y^j(c_i(t)))}{dt}|_{t=0}(\frac{\partial}{\partial y^j})_p = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial(y^j \circ \phi^{-1})}{\partial x^i}(\phi(p))(\frac{\partial}{\partial y^j})_p$

$\therefore (\frac{\partial}{\partial x^i})_p = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial(y^j \circ \phi^{-1})}{\partial x^i}(\phi(p))(\frac{\partial}{\partial y^j})_p$ ■

以降多様体上の C^∞ 関数全体集合を $\mathcal{F}(M)$ とする.

続いて多様体上の方向微分を定義する.

Def 0.8 方向微分

$v(=c'(0)) \in T_pM, f \in \mathcal{F}$ に対し f の v に関する**方向微分** vf を次で定義する.
$vf := \frac{df(c(t))}{dt}|_{t=0}$

Cor 方向微分の well-defined 性

vf は well-defined

proof)
$v = c'(0) = \bar{c}'(0)$ とする.また p のまわりの局所チャート $(U, \phi = (x^1, \cdots, x^m))$ をとる.
$\frac{d(f(c(t)))}{dt}|_{t=0} = \frac{d}{dt}|_{t=0}(f \circ \phi^{-1})(\phi(c(t)))$
$= \frac{d}{dt}|_{t=0}(f \circ \phi^{-1})(x^1(c(t)), \cdots, x^m(c(t)))$
$= \sum_{j=1}^m \frac{\partial(f\circ\phi^{-1})}{\partial x^j}(\phi(p))\frac{d(x^i(c(t)))}{dt}|_{t=0}$
$= \sum_{j=1}^m \frac{\partial(f\circ\phi^{-1})}{\partial x^j}(\phi(p))\frac{d(x^i(\bar{c}(t)))}{dt}|_{t=0}$
$= \frac{d(f(\bar{c}(t)))}{dt}|_{t=0}$ ■

次に多様体上の接ベクトル場を定義する.

Def 0.9 接ベクトル場

$p \in M$ に対し T_pM の元 X_pを対応させる対応 X を M 上の**接ベクトル場**という.

このとき $p_o \in M$ のまわりの局所チャート $(U, \phi = (x^1, \cdots, x^m))$ に対し、
$X_p = \sum_{i=1}^m X_i(p)(\frac{\partial}{\partial x^i})_p (p \in U)$ $(X_i : U \to \mathbf{R})$ と表される.($\because$ Prop 06)

$\mathrm{X}_p = \sum_{i=1}^m X_i(p)(\frac{\partial}{\partial x^i})_p = (\sum_{i=1}^m X_i\frac{\partial}{\partial x^i})_p$
よって $X = \sum_{i=1}^m X_i\frac{\partial}{\partial x^i}$ と書き表せる.これをベクトル場 X の U における**局所表現**という.

X が p_oで C^r級であることを各 X^iが p_oで C^r級と定義する.

X が C^{r}級接ベクトル場であることを X が M の各点で C^r級である事と定義する.
以降多様体 M 上の C^∞級接ベクトル場を $\mathcal{X}(M)$ とかく.

また接ベクトル場に関する方向微分を以下で定義

Def 0.10 接ベクトル場に関する方向微分

$p(\in M) \to X_p f$ によって M 上で定義される関数を Xf とかく.

このようにおくことによってようやく方向微分の一つの描像を手に入れる事が出来る. Prop0.6より $Xf = \sum_{i=1}^{m} X^i \frac{\partial f}{\partial x^i}$であるから
$(\frac{\partial}{\partial x^i})f = \sum_{j=1}^{m} (\frac{\partial}{\partial x^i})^j \frac{\partial f}{\partial x^j} = \frac{\partial f}{\partial x^i}$

なんと f を$\frac{\partial}{\partial x^i}$に関して方向微分したら f を x^iで偏微分したものと一致したのだ！驚くべき事に f が多様体上の関数であり方向微分は我々が Euclid 空間で習った偏微分を一般の多様体上に拡張しているものであることがわかる.

0.6　補足 2: テンソル

以下の議論では簡単のため V は実数体 R 上のベクトル空間とするが、一般の体 K においても以下の事は議論可能.

Def 0.11 双対空間

$V^{*} := \{f : V \to \mathbf{R} | f :$ 線形写像 $\}$ を V の**双対空間**という.

V^{*}上の加法とスカラー倍を次で定義、
$f, g \in V^{*}$, $\alpha \in \mathbf{R}$ に対して
$(f+g)(x) := f(x) + g(x) (x \in V)$
$(\alpha\ f)(x) := \alpha\ f(x) (x \in V)$

V^{*}はこの加法とスカラー倍に関して R 上のベクトル空間をなす.
ここで V^{*}の　零元 $0_V{}^{*} \in V^{*}$は $0_V{}^{*}(x) := 0_{\mathbf{R}}(x \in V)$ で定義される写像とする.

さてここで気になるところは双対空間の基底である.

Def 0.12 双対基底

$(e_1, \cdots, e_n) : V$ の基底, $f^1, \cdots, f^n : V \to \mathbf{R}$ を次で定義.
$f^i(e_j) := \delta^{\,i}_{j} (1 \leqq i, j \leqq n)$

Cor 0.13 双対空間の基底

上で定義した $(f^1, \cdots, f^n)$ は V^{*}の基底である.

proof)

(i) 一次独立性
$\sum_{i=1}^{n}\ a_i f^i=0$ とする.
このとき $0=(\sum_{i=1}^{n}\ a_i f^i)(e_j)=\sum_{i=1}^{n}\ a_i f^i(e_j)=\sum_{i=1}^{n}\ \delta^{\,i}_{\,j}=a_j$
$(\forall\ j=1,\cdots,n)$
$\therefore a_1=\cdots=a_n=0$
(ii) 生成性
任意に $f\in V*$をとる。このとき $f(e_j)=\sum_{i=1}^{n}\ f(e_i)\ \delta^{\,i}_{\,j}=\sum_{i=1}^{n}\ f(e_i)f^i(e_j)$
$=(\sum_{i=1}^{n}\ f(e_i)f^i)(e_j)\ (\forall\ j=1,\cdots,n)$
$\therefore f=\sum_{i=1}^{n}\ f(e_i)f^i$と表せる.■

また dim(V)=dim(V*) は明らか.

Cor 0.14 双対空間の双対空間

V が有限次元の場合 V と $(V^*)^*$は線形同形である.

proof)
$x\in V$ に対し$\phi(x):V^*\to\mathbf{R}$ を$\phi(x)(f)=f(x)(f\in V^*)$ と定めるとϕは線形同形写像である.
$\because)(i)$ 線形性
$\forall\ f\in V^*$に対し$\phi(\alpha\ x+\beta\ y)(f)=f(\alpha\ x+\beta\ y)=\alpha\ f(x)+\beta\ f(y)=\alpha\ \phi(x)(f)+\beta\,\phi(y)(f)=(\alpha\,\phi(x)+\beta\,\phi(y))(f)$
$(\alpha,\beta\in\mathbf{R},x,y\in V)$
(ii) 全単射
$\phi(x)=0$ とする。V の基底 $(e_1,\cdots,e_n)$ をとり $x=\sum_{i=1}^{n}\ x_i e_i$と表す.
また $(e_1,\cdots,e_n)$ に対する双対基底 $(f^1,\cdots,f^n)$ をとる.
$0=\phi(x)(f^j)=f^j(x)=f^j(\sum_{i=1}^{n}\ x_i e_i)=\sum_{i=1}^{n}\ x_i f^j(e_i)$
$=\sum_{i=1}^{n}\ x_i\,\delta^{\,i}_{\,j}=x_j\ (\forall\ j=1,\cdots,n)$
$\therefore$.
$\therefore$ 次元定理より dim((V*)*)=dim(Ker (ϕ))+dim(Im(ϕ))=dim(Im(ϕ)) だから Im(ϕ)=(V*)*■

ここでようやく (r, s) 次テンソルの定義に入る.

Def 0.15 (r, s) 次テンソル

$r,s \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ に対し $(\mathbf{r},\mathbf{s})$ **次テンソル空間** $T^{(r,s)}(V)$ を次で定義.
$T^{(r,s)}(V) := \{f : V^* \times \cdots V^* \times V \times \cdots V \to K | f$ は各成分ごとに線形 $\}$
$(V^*, V$ の個数はそれぞれ r,s 個)
(r,s) 次テンソル空間の元を $(\mathbf{r},\mathbf{s})$ **次テンソル**
(または**反変 r 次共変 s 次テンソル**) という.

$T^{(0,0)}(V) := \mathbf{R}$ と定義する.

$ex) T^{(1,0)}(V) = V^*, T^{(0,1)}(V) = (V^*)^* = V$

$\mathrm{T}^{(r,s)}(V)$ における加法とスカラー倍を次で定義する.
$f,g \in T^{(r,s)}(V)$, $\alpha \in \mathbf{R}$ に対し
$(f+g)(v^1,\cdots,v^r,w_1,\cdots w_s) := f(v^1,\cdots,v^r,w_1,\cdots w_s) + g(v^1,\cdots,v^r,w_1,\cdots w_s)$
$(\alpha\ f)(v^1,\cdots,v^r,w_1,\cdots w_s) := \alpha\ f(v^1,\cdots,v^r,w_1,\cdots w_s)(v^i \in V*, w_j \in V(i = 1,\cdots,r, j = 1,\cdots,s))$

$\mathrm{T}^{(r,s)}(V)$ はこの加法とスカラー倍に関して $\mathbf{R}$ 上のベクトル空間をなす (各自演習).
また多様体の各点に対し (r,s) 次テンソルを対応させる写像を $(\mathbf{r},\mathbf{s})$ **次テンソル場**といい $\mathcal{T}^{(r,s)}$ とかく.

Def0.16 テンソル積

$f \in T^{(r,s)}(V), g \in T^{(r',s')}(V)$ に対し f と g の**テンソル積**
$f \otimes g : V^* \times \cdots \times V^* \times V \times \cdots \times V \to \mathbf{R}(V^*, V$ の個数はそれぞれ $r + r', s + s'$個) を次で定義.
$f \otimes g(v^1,\cdots,v^r,v^{r+1},\cdots,v^{r+r'},w_1,\cdots,w_s,w_{s+1},\cdots,w_{s+s'})$
$= f(v^1,\cdots,v^r,w_1,\cdots,w_s)g(v^{r+1},\cdots v^{r+r'},w_{s+1},\cdots w_{s+s'})$

演習問題) (1)$f \in T^{(r,s)}(V), g \in T^{(r',s')}(V) \Rightarrow f \otimes g T^{(r+r',s+s')}(V)$ を示せ
(2)$f \otimes g \neq g \otimes f$ となる例を挙げよ.
(3)$\dim(T^{(r,s)}(V))$=(dimV)$^{r+s}$を示せ.
(4) $\mathrm{T}^{(r,s)}(V)$ の基底が $e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_r} \otimes f^{j_1} \otimes \cdots \otimes f^{j_r}$
であることを示せ.$(1 \leqq i_1,\cdots,i_r,j_1,\cdots,j_s \leqq m)$

ここではテンソルの数学的性質を紹介していまいち具体的なイメージを掴みづらかったかもしれないが次章で物理側で習うテンソルに今学んだ数学で

習うテンソルが適用され二つの概念がつながるのではないだろうか.

0.7 補足 3: 微分写像

Def0.17 微分写像

$M:m$ 次元多様体, $N:n$ 次元多様体, $f:M\to N:C^\infty$写像, $p\in M$
次で定義される $df_p:T_pM\to T_{f(p)}N$ を f の p における**微分写像**という.
$df_p(v)=(f\circ c)'(0)\ \ (v(=c'(0))\in T_pM)$

Cor 微分写像の well-defined 性

df_p は well-defined

proof) $v=c'(0)=\bar{c}'(0)$ として、p のまわりの局所チャート $(U,\phi=(x^1,\cdots,x^m)),f(p)$ のまわりの局所チャート $(V,\psi=(y^1,\cdots,y^n))$ をとる.

$(\mathrm{f}\circ c)'(0)=\sum_{j=1}^n\ \frac{dy^j((f\circ c)(t))(t)}{dt}|_{t=0}(\frac{\partial}{\partial y^j})_{f(p)}$
$=\sum_{j=1}^n\ (\sum_{i=1}^m\ \frac{\partial(y^j\circ f\circ\phi^{-1})}{\partial x^i}|_{\phi(p)}\frac{dx^i(c(t))}{dt}|_{t=0})(\frac{\partial}{\partial y^j})_{f(p)}$
$=\sum_{j=1}^n\ (\sum_{i=1}^m\ \frac{\partial(y^j\circ f\circ\phi^{-1})}{\partial x^i}|_{\phi(p)}\frac{dx^i(\bar{c}(t))}{dt}|_{t=0})(\frac{\partial}{\partial y^j})_{f(p)}$
$=(f\circ\bar{c})'(0)$ ■

Cor 微分写像の線形性

df_pは線形写像

proof)$h\in\mathcal{F}(N)$, α, $\beta\in\mathbf{R},\bar{c}(t):=\phi^{-1}(\ \alpha\ (\phi\circ c_1)(t)+\beta\ (\phi\circ c_2)(t))$, とおくと$\bar{c}'(0)=\ \alpha\ c_1'(0)+\beta\ c_2'(0)\in T_pM$ より
$(df_p(\ \alpha\ c_1'(0)+\beta\ c_2'(0))(h)=(df_p(\bar{c}'(0))))(h)$
$=(f\circ\bar{c})'(0)(h)$
$=\ \frac{d(h\circ f\circ\bar{c})(t)}{dt}|_{t=0}$
$=\ \frac{d(h\circ f)(\circ\bar{c}(t))}{dt}|_{t=0}$
$=(\bar{c}'(0))(hf)$
$=(\ \alpha\ c_1'(0)+\beta\ c_2'(0))(hf)$
$=(\ \alpha\ c_1'(0))(hf)+(\ \beta\ c_2'(0))(hf)$
$=\ \alpha\ df_p(c_1'(0))(h)+\beta\ df_p(c_2'(0))(h)$
$(\ \alpha\ df_p(c_1'(0))+\beta\ df_p(c_2'(0))(h)$ ■

今度は微分写像によって異なる多様体間の基底の変換則を考える. これにおける解析学で習った Euclid 空間上の Jacobi 行列を多様体上に拡張したものが得られる.

Cor 多様体間の基底の変換則

$f: M \to N: C^\infty$級, $(U, \phi = (x^1, \cdots, x^m)): p$ のまわりの局所チャート $,(V, \psi = (y^1, \cdots, y^n)): f(p)$ のまわりの局所チャートとする.
$df_p((\frac{\partial}{\partial x^i})_p) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial(y_j \circ f \circ \phi^{-1})}{\partial x^i}(\phi(p))(\frac{\partial}{\partial y^j})_{f(p)}$

proof)
$c_i(t) = \phi^{-1}(x^1(p), \cdots, x^i(p)+t, \cdots, x^m(p))$ とすれば $c_i'(0) = (\frac{\partial}{\partial x^i})_p$
$df_p((\frac{\partial}{\partial x^i})_p) = (f \circ c_i)'(0)$
$= \sum_{j=1}^n \frac{d(y_j(f \circ c_i)(t))}{dt}|_{t=0}(\frac{\partial}{\partial y^j})_{f(p)}$
$= \sum_{j=1}^n \frac{\partial(y_j \circ f \circ \phi^{-1})}{\partial x^i}(\phi(p))(\frac{\partial}{\partial y^j})_{f(p)}$■

M 上の C^∞級関数 $x^i: M \to \mathbf{R}$ の微分写像考える.(この x^iは局所チャートの座標関数) すなわち
$(dx_i)_p: T_pM \to T_{x^i(p)}\mathbf{R} \cong \mathbf{R}$

これが T_pM の基底らの双対基底である事を示そう.

Prop0.18

$((dx_1)_p, \cdots, (dx_m)_p)$ は T_pM の基底 $((\frac{\partial}{\partial x^1})_p, \cdots(\frac{\partial}{\partial x^m})_p)$ の双対基底である
.

proof) $(dx^i)_p((\frac{\partial}{\partial x^j})_p) = (x^i \circ c_j)'(0) = \delta^i_j$■

また $\mathcal{X}^*$を **$\mathbf{C}^\infty$級コベクトル場**という.

Thm0.19

$df_p = \sum_{i=1}^m \frac{\partial(f \circ \phi^{-1})}{\partial x^i}(\phi(p))(dx^i)_p$

proof)
$df_p((\frac{\partial}{\partial x^i})_p) = (f \circ c_i)'(0)$
$= (f \circ \phi^{-1} \circ \phi c_i)'(0)$
$= \sum_{j=0}^m \frac{\partial(f \circ \phi^{-1})}{\partial x^j}{}_{\phi(p)} \frac{d(x^j \circ c_i)(t)}{dt}|_{t=0}$
$= \sum_{j=0}^m \frac{\partial(f \circ \phi^{-1})}{\partial x^j}{}_{\phi(p)} \delta^k_i$
$= \sum_{j=0}^m \frac{\partial(f \circ \phi^{-1})}{\partial x^j}{}_{\phi(p)}(dx^j)_p((\frac{\partial}{\partial x^i})_p)$

$\therefore \mathrm{df}_p = \sum_{j=1}^m \frac{\partial(f \circ \phi^{-1})}{\partial x^j}(\phi(p))(dx^j)_p$■

$f: \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}$ の微分写像 df_pを考えるとこれは大学初年度で習う全微分そのも

のである.すなわち微分写像とは全微分を一般の多様体の場合に拡張したものであるという事が分かる.また全微分は厳密に $(T_p\mathbf{R}^m)$*の元であることが分かる.
また同様のことであるが解析学で微少量として扱ってきた dx^i は正確には接空間の双対空間の基底であることがわかる.
さらに $\mathbf{R}^m$ というベクトル空間に対し明らかに T_pM はその双対空間であり、また T_pM の双対空間の $T_p{}^*M := (T_pM)$*を考えればCor 0.14 より $T_p{}^*M$ と R^m は線形同形.よって dx^i らは $\mathbf{R}^m$ 上の量であり解析学でならう微少量と整合性のあるものである.この事実は多様体を介する事に依って得られるものである.このようにEuclid空間より一般化された多様体を学ぶ事により大学初年度で習った諸概念に更なる意味付けを与える事ができたり新たな発見もあるので微分幾何は楽しいものである.

この章の終わりとしてとうとう物理におけるテンソルの定義の与え方が数学側から導きだすことができる (何故なら一般相対論で考えるのがRiemann多様体だからということもわかるだろう).

$S \in \mathcal{T}^{(r,s)}$ に対し

$$S = S^{i_1,\cdots,i_r}_{j_1,\cdots,j_s} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \cdots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_r}} \otimes dx^{j_1} \otimes \cdots \otimes dx^{j_s}$$

$$=\mathrm{S}^{i_1,\cdots,i_r}_{j_1,\cdots,j_s}\left(\frac{\partial x'^{k_1}}{\partial x^{i_1}}\frac{\partial}{\partial x'^{k_1}}\right)\otimes\cdots\otimes\left(\frac{\partial x'^{k_r}}{\partial x^{i_r}}\frac{\partial}{\partial x'^{k_r}}\right)\otimes\left(\frac{\partial x^{j_1}}{\partial x'^{l_1}}dx'^{l_1}\right)\otimes\cdots\otimes\left(\frac{\partial x^{j_s}}{\partial x'^{l_s}}dx'^{l_s}\right)$$

$$= \frac{\partial x'^{k_1}}{\partial x^{i_1}}\cdots\frac{\partial x'^{k_r}}{\partial x^{i_r}}\frac{\partial x^{j_1}}{\partial x'^{l_1}}\cdots\frac{\partial x^{j_s}}{\partial x'^{l_s}} S^{i_1,\cdots,i_r}_{j_1,\cdots,j_s}\left(\frac{\partial}{\partial x'^{k_1}}\right)\otimes\cdots\otimes\left(\frac{\partial}{\partial x'^{k_r}}\right)\otimes(dx'^{l_1})\otimes(dx'^{l_s})$$

また $\mathrm{S}=\mathrm{S}'^{k_1,\cdots,k_r}_{l_1,\cdots,l_s} \frac{\partial}{\partial x'^{k_1}} \otimes \cdots \otimes \frac{\partial}{\partial x'^{k_r}} \otimes dx'^{l_1} \otimes \cdots \otimes dx'^{l_s}$

$$\mathrm{S}'^{k_1,\cdots,k_r}_{l_1,\cdots,l_s} = \frac{\partial x'^{k_1}}{\partial x^{i_1}}\cdots\frac{\partial x'^{k_r}}{\partial x^{i_r}}\frac{\partial x^{j_1}}{\partial x'^{l_1}}\cdots\frac{\partial x^{j_s}}{\partial x'^{l_s}} S^{i_1,\cdots,i_r}_{j_1,\cdots,j_s}$$

これは物理の相対論における反変 r 階共変 s 階テンソルの定義と合致している.

0.8　補足 4: Riemann 多様体の基礎

Def0.20 内積

$V : m$ 次元ベクトル空間, $g : V \times V \to \mathbf{R}$
g が V における**内積**であるとは次を満たすときをいう.
(1)g は双一次的.
(2)$g(x,y) = g(y,x)(x,y \in V), g(x,x) \geqq 0(x \in V)$(特に $g(x,x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$)
また $||x|| := \sqrt{g(x,x)}$を x の**長さ**という.

Def0.21 Riemann 計量

$g : p \mapsto g_p(p \in M)$ が M のRiemann計量であるとは g が $p \in M$ に対し内積 g_pを対応させかつ、$\forall\ X, Y \in \mathcal{X}, g(X,Y) : p \mapsto g_p(X_p, Y_p) \in \mathbf{R}$ は C^∞ 級である.

また $g_{ij} := g(\frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^j})$ とおく.また本節に登場するが $g^{ij} := (g_{ij})^{-1}$ と定義する.

明らかに g は M 上の (0,2) 次対称テンソル場である.(ここでいう (r,s) 次テンソル場とは各点に対し (r,s) 次テンソルを対応させる写像で対称とは g(X, Y)=g(Y, X) のことである)

Def0.22 Riemann 多様体

多様体 M とその上のRiemann計量 g のペア
(M, g) を **Riemann 多様体**という.

最後にパラコンパクト (X がパラコンパクトであるとは X の任意の開被覆に対しその細分 $\{U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ を適当に作れば X の各点 p に対し $\{U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ の有限個としか交わらないような p の近傍 W が存在) な多様体には Riemann 計量 が存在する事を事実として補足を終える (Rimann 計量 の存在証明については参考文献 [4] を参照されたし).

0.9 参考文献

[1] 藤井保憲「時空と重力」(産業図書 1979)

[2] 松本幸夫 「多様体の基礎」 (東京大学出版会 1988)

[3] 坪井俊 「幾何学 I 多様体入門 」(東京大学出版会 2005)

[4] 松島与三 「多様体入門」(裳華房 1965)

[5] 村上信吾 「多様体」(共立出版 1969)

[6] 石原繁 「初等リーマン幾何」(森北出版 1974)

[7] 加須栄篤 「リーマン幾何学」(培風館 2001)

[8] 朝長康郎 「リーマン幾何入門」(共立出版 1970)

[9] 茂木勇 伊藤光弘 「微分幾何学とゲージ理論」(共立出版 1986)

[10] 小林昭七 「接続の微分幾何とゲージ理論 」(裳華房 1989)

[11] シュッツ 「相対論入門 下 一般相対論」 (丸善株式会社 1988)

[12] シュッツ 「物理学における幾何学的方法」(吉岡書店 1987)

本稿の相対論の物理的立場はほぼ [1] に依っている. 多様体 (注:Riemann 多様体ではない) の基礎概念は [2],[3],[4] を参考にした. 尚多様体を学ぶのに必要な位相の知識は [2], [4] で間に合う. 平行移動の定義と共変微分の厳密な数学的関係を知りたければ [5] を参照すると良い.3 章 (Riemann 多様体の基礎概念及び線形接続、共変微分、Riemann 接続) のほとんどは [6] に依る. $\nabla g=0$ であればベクトルのノルムが平行移動不変なことは [7] の証明をほぼ丸写ししてしまっている. [8] は数学書だが 3 章で一般相対論を扱うというユニークな本であり本稿を書こうという意欲を高めてくれた. [9][10] は平行移動、曲率テンソルなどの描像解釈のために参考にした. [11][12] はところどころしか見ていないが多様体が登場する. とくに [12] は物理屋で微分幾何学を理解したい方にはとても興味深い内容になっているのではないだろうか?