

分野班紹介

数学・物理教務係より

2022年11月26日

本 PDF では、第 24 回数物セミナー合同合宿におけるリレーセミナー班の候補となる分野と必要な前提知識及びその難易度の目安 (☆の数が多いほど比較的難しい)、教科書の候補などを紹介いたします。前提知識の多寡や参加者のセミナーに期待する内容の大きなずれなどを避けるためにご参照ください。

リレーセミナーの意義は、さまざまな興味を持った参加者の間で交流を深め、これまで学習してこなかった数学や物理に対して教養を深めることにあります。自らの専門とする分野を深めたいと思われる参加者もいらっしゃると思いますが、是非数学、物理問わず知らない分野に手を伸ばしてみることを検討してみてください。新たな発見があるかもしれません。

リレーセミナー班は、おおまかに基礎的な内容を扱う班と発展的な内容を扱う班があります。参加申し込みフォームに基礎・発展を選ぶ項目と、自由記述欄があります。基礎・発展は自身の興味に合わせて選んでください。また自由記述欄では、リレーセミナーで扱いたい内容をできるだけ詳細に書いてください。同じ班に可能な限り似たような興味を持つ方を集めるために参考にする場合があります。

班の決定後、同じ班のメンバーと相談して教科書やリレーセミナーで取り扱う範囲を決めていただきます。教科書などは本 PDF 内でいくつか提案しておりますがあくまで一例です。班のメンバーの興味に合わせて適切な教科書を選ぶことを推奨します。また、リレーセミナーの時間はおよそ 14 時間前後となり、一冊を通読することは難しいと思われま。す。ですから、興味の内容に合わせて適切な範囲設定をすることをお勧めします。そのほか、前提知識などについてはオンラインセミナーなどにて参加者同士で合宿前までに学ぶことも可能です。

末筆ではございますが、あなたのご参加をお待ちしております。

数学

基礎的内容と発展的内容の二つの概要及び主な教科書に加え、基礎的内容の前提知識と難易度を紹介します。概要や主な教科書は内容を強く制限するものではありませんが、基礎的な内容については初学者が無理なく学習できるような範囲や速度でのリレーセミナーを想定してください。発展的な内容については概要や教科書はあくまで目安であり、参加者の間で相談し、自由に内容や教科書を選択してください。これについて、同じ興味の方で班を組めるように、発展的内容を希望する場合は学習したい内容を自由記述欄に書いていただくようよろしくお願いいたします。また、普段物理を学ばれている方の数学へのリレーセミナー参加を強く歓迎します。

数学教務係

複素解析学

概要 複素平面上で定義された 1 変数複素関数を学ぶ。複素積分にまつわる種々の定理は非常に強力である。特に留数定理を用いることで非常にエレガントに積分をすることができる場合があり、快感を感じる者も多い。留数定理などを目標にするとよい。

難易度 ☆

主な前提知識 大学 1 年生程度の微分積分学と線形代数

主な教科書

高橋礼司「複素解析」

アールフォルス「複素解析」

野口潤次郎「複素解析概論」

微分方程式論

概要 ここでは、主に常微分方程式の性質について学ぶ。また、時間発展する系について調べる力学系という分野もあるが、今回はここに含まれるものとする。

難易度 ☆☆

主な前提知識 微分積分学、線形代数学

主な教科書

ポントリャーギン「常微分方程式」
スメール他「力学系入門」
千葉逸人「解くための微分方程式と力学系理論」

ルベーグ積分

概要 面積, 体積, 個数といった「大きさ」に関する概念を一般化したものを測度という。これを用い, リーマン積分の概念をより広げたものがルベーグ積分であり, これについて学ぶ。

難易度 ☆☆

主な前提知識 微分積分学, 位相空間論 (の基礎), 素朴集合論

主な教科書

猪狩惺「実解析入門」
伊藤清三「ルベーグ積分入門」

函数解析学

概要 実関数や複素関数のうちよい性質を持ったものを考えると, ノルムを備えた線形空間になる場合がある。この関数空間や, その線形写像についての色々な性質を解き明かすのが函数解析学である。量子力学との関係が深いことが知られており, 数理物理的なゼミをすることも可能である。

難易度 ☆☆

主な前提知識 位相空間論, (実) 解析学, 線形空間論

主な教科書

泉正己「数理科学のための関数解析学」
黒田成俊「関数解析」

数学基礎論

概要 数学基礎論では現代数学の基礎について学ぶ。数学基礎論は主に数理論理学と公理的集合論に分かれているが, どちらをリレーセミナーのテーマにしてもよい。数理論理学は数学の基礎となる論理について解析する分野である。形式的体系の表現力や形式証明系の演繹の能力などを調べる。公理的集合論は、集合とよばれる数学的対象をあつかう数学理論である。論理や述語論理とともに, 集合論は数

学の公理的な基礎付けをあたえ、数学的な対象を形式的に（無定義語の）「集合」と「帰属関係」によって構成することが可能になる。また、集合論の公理として何を仮定するとどんな体系が得られるか、といった集合それ自体の研究も活発に行われている。

難易度 ☆～☆☆☆

基本 命題論理や一階述語論理の健全性や完全性などを学ぶ。

発展 公理的集合論において、色々な公理の独立性を学ぶ。

主な前提知識 なし（素朴集合論に触れたことがあるとよい）

主な教科書

キューネン「集合論—独立性証明への案内」

キューネン「数学基礎論講義」

鹿島亮「数理論理学」

Thomas Jech「Set Theory: The Third Millenium Edition」

代数学入門

概要 整数や有理数、複素数といった演算の付随した集合の性質を一般化した代数的対象について考察する。例えば群論では、群という代数構造について調べること、例えばルービックキューブの可能な配置や操作について調べたり、エニグマ暗号を解読することができる。

難易度 ☆

主な前提知識 なし

主な教科書

雪江明彦「代数学 1 群論入門」

桂利行「代数学 I 群と環」

数論

概要 整数や、それに付随する代数的整数などの代数的対象について考察する。また、楕円曲線上の有理点を調べ、整数の方程式について調べることや、数論的に重要であるゼータ関数の考察をしても良い。

難易度 ☆

基本 前提知識を仮定せず、初等的な整数論について学ぶ。

発展 Galois 理論などを仮定し、代数的整数論などについて学ぶ。

主な前提知識 なし

主な教科書 (基礎)

雪江明彦 「整数論 1 初等整数論から p 進数へ」

高木貞治 「初等整数論講義」

主な教科書 (発展)

J. Neukirch 「代数的整数論」

シルヴァーマン・テイト 「楕円曲線論入門」

加藤和也・黒川信重・斉藤毅 「数論 I・II」

可換代数

概要 それ自身非常に興味深い内容でありながら現代数学においてもさまざまな分野の基礎となっている可換代数について考察する.

難易度 ☆☆

基本 群や環についての基本的知識を仮定し, 可換代数について学ぶ.

発展 可換代数について深く学ぶ.

主な前提知識 群や環についての基本的知識

主な教科書 (基礎)

雪江明彦 「代数学 2 環と体とガロア理論」

Atiyah, Macdonald 「可換代数入門」

主な教科書 (発展)

松村英之 「可換環論」

渡部敬一, 後藤四郎 「可換環論」

ガロア理論

概要 体論の基礎と体の構造や方程式の構造を, 群を用いて調べるガロア理論について学ぶ. 正多角形の作図可能性といった作図問題にも深い関連がある.

難易度 ☆☆

主な前提知識 群論, 環論

主な教科書

雪江明彦 「代数学 2 環と体とガロア理論」

桂利行 「代数学 III 体とガロア理論」

代数幾何

概要 代数幾何は多項式の零点からなる集合である代数多様体について調べる学問である.

難易度 ☆☆~☆☆☆

基本 古典的な代数幾何である代数曲線論について学ぶ.

発展 グロタンディーク以降のスキーム論をベースにした代数幾何を学ぶ.

主な前提知識 可換環論

主な教科書 (基礎)

今野一宏 「平面代数曲線の話」

上野健爾 「代数幾何入門」

主な教科書 (発展)

上野健爾 「代数幾何」

宮西正宜 「代数幾何学」

R. ハーツホーン 「代数幾何学」

表現論

概要 表現論は群や多元環, Lie 代数などの対象をベクトル空間への作用を用いて調べる分野である. 関連分野も幅広く現代の数学で非常に重要な分野となっている.

難易度 ☆☆~☆☆☆

基本 有限群の表現などの基本的な表現論について学ぶ.

発展 発展的な表現論について学ぶ.

主な前提知識 線形代数

主な教科書 (基礎)

池田岳 「テンソル代数と表現論:線形代数続論」

J. P. Serre 「有限群の線型表現」

主な教科書 (発展)

小林俊行, 大島利雄 「リー群と表現論」

高瀬幸一 「群の表現論序説」

圏論

概要 圏論は数学的対象間の関係性を統一的に扱う分野である。圏論的定式化により内部の構造に言及しない関係性や、別の数学的対象との関係などを統一的にみることができる。また、それと密接に関係があるホモロジー代数について学んでもよい。

難易度 ☆☆

基本 基本的な圏論について学ぶ。

発展 導来圏などの発展的な概念について学ぶ。

主な前提知識 なし (代数トポロジーなどの具体例を知っていると理解がしやすい)

主な教科書 (基礎)

Tom Leinster 「ベーシック圏論 普遍性からの速習コース」
alg-d 「全ての概念は Kan 拡張である。」

主な教科書 (発展)

梶浦宏成 著 「数物系のための圏論」
志甫淳 「層とホモロジー代数」

微分幾何

概要 微分幾何学は曲線や曲面、あるいは一般には微分可能多様体の構造に対して微分積分を用いて調べる分野である。

難易度 ☆

基本 基礎的な曲線/曲面論について学ぶ。

発展 Riemann 幾何などについて学ぶ。

主な前提知識 なし

主な教科書 (基礎)

小林昭七 「曲線と曲面の微分幾何」
梅原雅顕, 山田光太郎 「曲線と曲面 微分幾何的アプローチ」

主な教科書 (発展)

今野宏 「微分幾何学」
小林昭七 「接続の微分幾何とゲージ理論」

多様体論

概要 多様体とは局所的にユークリッド空間と同相な位相空間でありユークリッド空間の自然な拡張である. 多様体論は多様体上の微分や積分などについて調べる.

難易度 ☆☆

基本 多様体について基本的な概念を学ぶ.

発展 多様体上の微分形式などについて学ぶ.

主な前提知識 位相空間論

主な教科書 (基礎)

松本幸夫 「多様体の基礎」

坪井俊 「幾何学 I 多様体入門」

主な教科書 (発展)

Tu 「トゥー 多様体」

坪井俊 「幾何学 III 微分形式」

トポロジー

概要 トポロジーは空間の持つ位相的性質を (今回は主として代数的に) 調べる分野である. 主にホモトピーや (コ) ホモロジーについて学ぶ.

難易度 ☆☆

基本 基本群と被覆空間, あるいは単体複体/胞体複体/特異 ホモロジーについて学ぶ.

発展 ファイバー束とホモトピー群などについて学ぶ.

主な前提知識 位相空間論

主な教科書 (基礎)

梶田幹也 「代数的トポロジー」

坪井俊 「幾何学 II ホモロジー入門」

主な教科書 (発展)

服部晶夫 「位相幾何学」

玉木大 「ファイバー束とホモトピー」

数理物理学

概要 数学と物理の境界をなす分野について学ぶ. リレーセミナーではゲージ理論や, 量子力学における関数解析などを想定しているが, 基本的に自由である. そのた

め、この班を希望する場合はアンケートで自分が何をやりたいのかを特に詳しく書いていただきたい。

物理

分野紹介の構成として、「概要」にはその分野の簡単な紹介を書きました。「難易度」はあくまで目安の一つとして考えていただきたいです。「主な前提知識」はその分野を学ぶ上で必要になる・知っておいた方がいいことを書いていますが、扱う教科書等にも依存すると思うので、班が決定した後に柔軟に対応していただきたいです。「主な教科書」は、班決定後にリレーセミナーで使う教科書を決める際の参考にしてください。最後になりますが、ぜひ一緒に物理を楽しみましょう。

物理教務係

解析力学

概要 座標等を一般化して、抽象的に力学を扱う体系である。新たにラグランジアンやハミルトニアンといった量を扱うことになるが、それらの持つ普遍性はニュートン力学に留まらず、様々な物理の体系に応用されている。

難易度 ☆

主な前提知識 ニュートン力学

主な教科書

Landau, Lifshitz 「力学」

畑浩之「解析力学」

電磁気学

概要 その名の通り、電気や磁気について考える。ベクトル解析や「場」という物理量を考える点が初学者には分かりにくいところだが、学んでいくにつれて学習者の物理学の世界観が一段階上がる面白い分野である。相対論やゲージ理論など、現代物理学の出発点にもなっている。

難易度 ☆

主な前提知識 ベクトル解析, 微分積分

主な教科書

砂川重信「理論電磁気学」

熱力学

概要 一般にマクロな系は無数のパラメータを持つ。その中で「平衡状態」という数個のパラメータで記述できる特殊な状態を利用し、マクロな系が共通して持つ普遍性を議論するのが熱力学である。マクロな系に特有の「エントロピー」が現れるのもこの分野の特徴である。

難易度 ☆

主な前提知識 微分積分（特に偏微分や全微分）

主な教科書

田崎晴明「熱力学—現代的な視点から」

清水明「熱力学の基礎 I」

量子力学

概要 古典物理学が物理量の値を予測するのに対し、量子力学は物理量の確率分布を予測する。そのような理論体系そのものの転換によって、量子力学は直感に反する事柄を数多く抱えているが、現在までに数多くの現象を上手く説明してきた。現代物理学を理解するためには避けては通れない分野である。

難易度 ☆☆

主な前提知識

主な教科書

j.j.Sakurai「現代の量子力学」

谷村省吾「量子力学 10 講」

統計力学

概要 熱力学では踏み込まないマクロな系を構成する粒子に焦点を当てて、量子力学により記述されるミクロな系の性質から熱力学を説明しようとする体系である。多数の粒子を 1 つ 1 つ扱うのは非常に難しいので、代わりに確率論を使って統計的に系の様子を記述する。

難易度 ☆☆

主な前提知識 数理統計学, 熱力学, 量子力学

主な教科書

田崎晴明「統計力学 I・II」

流体力学

概要 空間的に広がりをもった物質を扱う連続体力学の中で、液体や気体といった流体を扱う分野である。ベクトル解析や複素解析を使った議論で、他と比べると計算量が多いが、身の回りにあふれている「流れ」という現象について記述する能力は非常に強力である。

難易度 ☆☆

主な前提知識 ベクトル解析, 複素解析, 微分方程式

主な教科書

巽友正「流体力学」

今井功「流体力学」

量子情報

概要 近年盛り上がりを見せる量子コンピュータの基礎となっている量子エンタングルメントを扱う分野である。量子系に対する入出力を扱えるように量子力学を捉え直し、情報理論と組み合わせて量子系間の通信について論じる。ブラックホールや超弦理論への応用も考えられている。

難易度 ☆☆☆

主な前提知識 量子力学, 線形代数

主な教科書

石坂智 他「量子情報科学入門」

Nielsen, Chuang「Quantum Computation and Quantum Information」

場の量子論

概要 量子力学と特殊相対性理論をもとにした場の理論であり、理論の基本変数として「場」という量を考え、これに量子化の手続きを施すことで、量子力学では扱うことが難しかった高エネルギーでの反応や粒子の生成消滅などの反応を扱うことができるようになる。

難易度 ☆☆☆

主な前提知識 解析力学, 量子力学, 特殊相対性理論

主な教科書

Peskin, Schroeder 「An Introduction To Quantum Field Theory」

坂本真人 「場の量子論」

素粒子論

概要 場の量子論を基礎理論として物質の基本単位である素粒子について考える分野. 量子色力学やゲージ理論など, 場の量子論からさらに一歩進んだ内容を中心に扱っていく. 実験的に場の量子論と分けているので素粒子について詳しく知りたい方はこちらを希望していただきたい.

難易度 ☆☆☆

主な前提知識 特殊相対性理論, 量子力学, 場の量子論

主な教科書

九後 汰一郎 「ゲージ場の量子論」

長島 順清 「素粒子物理学の基礎」

一般相対性理論

概要 すべての座標系において物理法則は不変という立場から重力を説明した理論である. 理解するためには比較的高度な数学が必要であるが, 重力波やブラックホールなど, 面白い話題は多い.

難易度 ☆☆☆

主な前提知識 解析力学, 特殊相対性理論

主な教科書

Wald 「General Relativity」

内山龍雄 「一般相対性理論」

光学

概要 小学生の頃から慣れ親しんでいる幾何光学から, 波動光学, 量子光学などの応用的な話まで分野の幅は広い. 光は我々の身の回りにありふれたものであるというだけでなく, 天文学の観測や物性実験など物理学の発展に無くてはならないものである.

難易度 ☆☆☆

主な前提知識 電磁気学

主な教科書

Hecht 「Optics」

Born, Wolf 「Principles of Optics」

生物物理

概要 生物物理学とは、生体を構成する物質の動的メカニズムを明らかにし、さらに、それらで構成された生体組織の各階層間をつなぐ原理原則を見出すことによって生命を理解しようという学問分野である。ここ 15 年の間での計算機や実験技術の向上等によりこの分野は急速に進展しており、他の物理分野とは違った面白さがある。

難易度 ☆☆

主な前提知識 力学, 電磁気, 熱・統計力学

主な教科書

鳥谷部祥一 他 「生物物理学」

望月敦史 「理論生物学概論」

固体物理学

概要 電磁気学や量子力学, 統計力学に基づいて、固体に関する様々な物理現象について議論する。自由電子気体やバンド理論, 超伝導など、数多くの題材があるので、リレーセミナーをやる上での自由度はかなり高い。

難易度 ☆☆☆

主な前提知識 電磁気学, 量子力学, 統計力学

主な教科書

Ashcroft, Mermin 「Solid State Physics」

斯波弘行 「基礎の固体物理学」