

# 分野班紹介

数学・物理教務係より

2023年5月30日

本 PDF では、第 25 回数物セミナー合同合宿におけるリレーセミナー班の候補となる分野と必要な前提知識及びその難易度の目安 (☆の数が多いほど比較的難しい)、教科書の候補などを紹介いたします。前提知識の多寡や参加者のセミナーに期待する内容の大きなずれなどを避けるためにご参照ください。

リレーセミナーの意義は、さまざまな興味を持った参加者の間で交流を深め、これまで学習してこなかった数学や物理に対して教養を深めることにあります。自らの専門とする分野を深めたいと思われる参加者もいらっしゃると思いますが、是非数学、物理問わず知らない分野に手を伸ばしてみることを検討してみてください。新たな発見があるかもしれません。参加申し込みフォームに自由記述欄があります。自由記述欄では、リレーセミナーで扱いたい内容をできるだけ詳細に書いてください。同じ班に可能な限り似たような興味を持つ方を集めるために参考にすることがあります。

班の決定後、同じ班のメンバーと相談して教科書やリレーセミナーで取り扱う範囲を決めていただきます。教科書などは本 PDF 内でいくつか提案しておりますがあくまで一例です。班のメンバーの興味に合わせて適切な教科書を選ぶことを推奨します。また、リレーセミナーの時間はおよそ 14 時間前後となり、一冊を通読することは難しいと思われます。ですから、興味の内容に合わせて適切な範囲設定をすることをお勧めします。そのほか、前提知識などについてはオンラインセミナーなどにて参加者同士で合宿前までに学ぶことも可能です。

末筆ではございますが、ご参加をお待ちしております。

## 数学

各分野の概要及び主な教科書, 前提知識と難易度を紹介します. 教科書については基礎的なものから発展的な物まで幅広く紹介しておりますので, 参加者の前提知識等に合わせ各班のメンバー全員が無理なく学習できるものを選択してください. なお, 分野を大きく逸脱しないものであればここで紹介されている教科書以外を読むことも可能です. また各分野の中でもさまざまなトピックがあるため, ミスマッチを避けるため学習したい内容を募集フォームの自由記述欄に書いていただくようお願いいたします. 前提知識のうち括弧がついているものは必ずしも必要ではないが, あったら学習しやすい, もしくは発展的な内容が学べるものを表しています.

数学教務係

## 解析学

### 複素解析学

**概要** 複素平面上で定義された 1 変数複素関数を学ぶ. 複素積分にまつわる種々の定理は非常に強力である. 特に留数定理を用いることで非常にエレガントに積分をすることができる場合があり, 快感を感じる者も多い. 留数定理などを目標にするとよい.

**難易度** ☆

**主な前提知識** 微分積分学, 線形代数学

**主な教科書**

高橋礼司「複素解析」

アールフォルス「複素解析」

野口潤次郎「複素解析概論」

### 微分方程式論

**概要** 未知関数の導関数を含む方程式である, 常微分方程式および偏微分方程式の性質について学ぶ. また, 時間発展する系について調べる力学系という分野もあるが, 今回はここに含まれるものとする.(自由記述欄にどれをやりたいか書いていただくようお願いいたします)

難易度 ☆☆ ~ ☆☆☆

主な前提知識

常微分方程式 微分積分学、線形代数学

偏微分方程式 函数解析学

主な教科書

ポントリャーギン「常微分方程式」

金子 晃「偏微分方程式入門」

熊ノ郷 準「偏微分方程式」

スメール他「力学系入門」

千葉逸人「解くための微分方程式と力学系理論」

## 函数解析学

**概要** 実関数や複素関数のうちよい性質を持ったものを考えると、ノルムを備えた線形空間になる場合がある。この関数空間や、その線形写像についての色々な性質を解き明かすのが函数解析学である。量子力学との関係が深いことが知られており、数理物理的なゼミをすることも可能である。

難易度 ☆☆

主な前提知識 位相空間論, (実) 解析学, 線形空間論

主な教科書

泉正己「数理科学のための関数解析学」

黒田成俊「関数解析」

## 確率論

**概要** 確率の概念を測度論を用いて定式化し、その性質について調べる分野である。数理統計学、経済学などへの応用がある。参加者の興味に合わせて、確率過程や確率微分方程式について学んでもよい。

難易度 ☆☆ ~ ☆☆☆

主な前提知識 測度論, (函数解析学)

主な教科書

清水 泰隆「統計学への確率論」

舟木 直久「確率論」

伊藤 清 「確率論」

## 代数学

### 群論

**概要** 整数の加法、行列の積といったように集合に一つの演算が付随した群という抽象化された代数的対象について学ぶ. 群は対称性をよく表しており, 応用すれば例えばルービックキューブの可能な配置や操作について調べることや, エニグマ暗号を解読することができる. 元の数有限である有限群の構造を分類することも面白いトピックである.

**難易度** ☆～☆☆

**主な前提知識** なし

**主な教科書**

雪江明彦 「代数学 1 群論入門」

桂利行 「代数学 I 群と環」

### 可換代数

**概要** 整数の性質を抽象化した可換環, およびベクトル空間を一般化した環上の加群について主に学ぶ. それ自身非常に興味深い内容でありながら現代数学においてもさまざまな分野の基礎となっていて, 代数幾何や数論への応用がある. また, ホモロジー代数との関係も深いためホモロジー代数について学んでもよい.

**難易度** ☆☆

**主な前提知識** 群, 環, 体に関する基礎知識

**主な教科書**

雪江明彦 「代数学 2 環と体とガロア理論」

Atiyah, Macdonald 「可換代数入門」

松村英之 「可換環論」

渡部敬一, 後藤四郎 「可換環論」

志甫淳 「層とホモロジー代数」

## ガロア理論

**概要** 体論の基礎と体の構造や方程式の構造を, 群を用いて調べるガロア理論について学ぶ. 方程式の可解性を調べるにとどまらず, 正多角形の作図可能性の問題, 数論などへの幅広い応用がある. 発展的な内容である無限次 Galois 拡大などについて学んでもよい.

**難易度** ☆☆

**主な前提知識** 群論, 環論

**主な教科書**

雪江明彦「代数学 2 環と体とガロア理論」

桂利行「代数学 III 体とガロア理論」

永田 雅宜「可換体論」

## 代数幾何

**概要** 代数幾何は多項式の零点からなる集合である代数多様体について調べる学問である. 古典的な代数幾何とグロタンディークが創始したスキーム論を基礎とした代数幾何がある. 古典的代数幾何学では多項式の零点集合を可換環論を用いて調べる. スキームは古典的代数幾何で扱う対象を圏論などを用いて一般化した概念であり, 数論などへの応用もある. 参加者の興味により選択するとよい.

**難易度** ☆☆~☆☆☆

**主な前提知識** 可換環論,(圏論)

**主な教科書**

今野一宏 「平面代数曲線の話」

上野健爾 「代数幾何入門」

宮西正宜 「代数幾何学」

## 表現論

**概要** 表現論は数学における様々な対象をベクトル空間への作用を用いて調べる分野である. 有限群の表現は有限群の構造を調べるための強力な道具である. Lie 群は滑らかな多様体でもあるような群であり, 物理などへの応用があることが知られている. 函数空間への表現やフーリエの理論を一般化した調和解析などの解析学との繋がりもある. 考えられるトピックが非常に広いため, 参加者の興味

に合わせて選ぶとよい.

難易度 ☆☆~☆☆☆

主な前提知識 線形代数, 群論

主な教科書

池田岳 「テンソル代数と表現論: 線形代数続論」

J. P. セール 「有限群の線型表現」

小林俊行, 大島利雄 「リー群と表現論」

高瀬幸一 「群の表現論序説」

## 圏論

概要 圏論は数学的対象の間関係性を統一的に扱う分野である. 圏論的定式化により内部の構造に言及しない関係性や, 別の数学的対象との関係などを統一的にみることが出来る.

難易度 ☆☆

主な前提知識 なし (代数トポロジーなどの具体例を知っていると理解がしやすい)

主な教科書

T. レンスター 「ベーシック圏論 普遍性からの速習コース」

alg-d 「全ての概念は Kan 拡張である。」

S. マックレーン 「圏論の基礎」

Emily Riehl, *Category Theory in Context*

## 整数論

概要 整数や, それに付随する代数的整数などの代数的対象について考察する. また, 楕円曲線上の有理点を調べ, 整数の方程式について調べることや, 数論的に重要であるゼータ関数の考察をしても良い.

難易度 ☆~☆☆☆

主な前提知識 代数学の基礎

主な教科書

雪江明彦 「整数論 1 初等整数論から  $p$  進数へ」

雪江明彦 「整数論 2 代数的整数論の基礎」

高木貞治 「初等整数論講義」

J. ノイキルヒ 「代数的整数論」

シルヴァーマン・テイト「楕円曲線論入門」

加藤和也・黒川信重・斉藤毅「数論Ⅰ・Ⅱ」

## 幾何学

### 多様体論

**概要** 多様体とは局所的にユークリッド空間と同相な位相空間でありユークリッド空間の自然な拡張である. 多様体自体の性質や多様体上に一般化された微分や積分などについて調べる.

**難易度** ☆☆

**主な前提知識** 微分積分学, 位相空間論

**主な教科書**

松本幸夫 「多様体の基礎」

坪井俊 「幾何学Ⅰ 多様体入門」

Tu 「多様体」

### 微分幾何

**概要** 微分幾何学は曲線や曲面, あるいは一般には微分可能多様体の構造に対して微分積分を用いて調べる分野である. 参加者の興味に合わせて, ユークリッド空間内の曲線, 曲面について調べても良いし, 可微分多様体の構造について調べてもよい. 距離の概念を一般化した構造が入っている可微分多様体について調べる Riemann 幾何のゼミをすることも可能である.

**難易度** ☆～☆☆☆

**主な前提知識** 微分積分学,(多様体)

**主な教科書**

小林昭七 「曲線と曲面の微分幾何」

梅原雅顕, 山田光太郎 「曲線と曲面 微分幾何的アプローチ」

坪井俊 「幾何学Ⅲ 微分形式」

今野宏 「微分幾何学」

小林昭七 「接続の微分幾何とゲージ理論」

## 代数トポロジー

**概要** 代数トポロジーは位相空間の持つ特徴をうまく抽出したホモロジー群, 基本群などの代数的対象を用いてもとの位相空間について調べる分野である.

**難易度** ☆☆

**主な前提知識** 位相空間論

**主な教科書**

梶田幹也 「代数的トポロジー」

河澄 響矢 「トポロジーの基礎」

坪井俊 「幾何学II ホモロジー入門」

服部晶夫 「位相幾何学」

玉木大 「ファイバー束とホモトピー」

## 応用数学

### 数学基礎論

**概要** 数学基礎論では現代数学の基礎について学ぶ. 主に数理論理学と公理的集合論がある. 数理論理学は数学の基礎となる論理について解析する分野である. 公理的集合論は、集合とよばれる数学的対象をあつかう数学理論である. どちらをリレーセミナーのテーマにしてもよい.

**難易度** ☆~☆☆☆

**主な前提知識** (素朴集合論)

**主な教科書**

キューネン 「集合論—独立性証明への案内」

キューネン 「数学基礎論講義」

鹿島亮 「数理論理学」

Thomas Jech, *Set Theory: The Third Millenium Edition*

### 数理統計学

**概要** 統計データの解析や推測を行うための数学的基礎づけを行う. データ分析, 機械学習, 経済学などの現実の問題に対し幅広く応用されており現在人気の高い学問である.



難易度 ☆～☆☆

主な前提知識 線形代数, 微分積分学, (実解析学の基礎)

主な教科書

竹村 彰通「現代数理統計学」

久保川達也「現代数理統計学の基礎」

## 物理

分野紹介の構成として、「概要」にはその分野の簡単な紹介を書きました。「難易度」はあくまで目安の一つとして考えていただきたいです。「主な前提知識」はその分野を学ぶ上で必要になる・知っておいた方がいいことを書いていますが、扱う教科書等にも依存すると思うので、班が決定した後に柔軟に対応していただきたいです。「主な教科書」は、班決定後にリレーセミナーで使う教科書を決める際の参考にしてください。最後になりますが、ぜひ一緒に物理を楽しみましょう。

物理教務係

### 解析力学

**概要** 最小作用の原理によって記述される体系を扱う分野。初めは古典力学のニュートンの運動方程式とは異なる定式化として導入されたが、数多くの物理の理論がラグランジュ形式などの解析力学の枠組みの中で記述されるなど、強い普遍性を持つ体系である。対称性の果たす役割がわかりやすいなどの利点もある。

**難易度** ☆

**主な前提知識** 特になし

**主な教科書**

畑浩之「解析力学」

近藤慶一「解析力学講義」

### 電磁気学

**概要** 電気や磁気について考える分野。ベクトル解析や「場」という物理量を考える点が初学者には分かりにくいところだが、学んでいくにつれて学習者の物理学の世界観が一段階上がる面白い分野である。相対論やゲージ理論など、現代物理学の出発点にもなっている。応用として、電磁場の振動が伝播する現象である光について詳しく学ぶこともできる。

**難易度** ☆

**主な前提知識** ベクトル解析

**主な教科書**

砂川重信「理論電磁気学」

米谷民明「初歩の相対論から入る 電磁気学」

## 量子力学

**概要** 電子などのミクロな粒子の運動を説明するためにできた分野だが、それにとどまらず、理論体系そのものの転換を引き起こした。物理量の値が確率的にしか予言できず、不確定性関係やベルの不等式の破れといった非直観的な性質を示すのが特徴である。

**難易度** ☆☆

**主な前提知識** 線形代数

**主な教科書**

清水明「量子論の基礎」

谷村省吾「量子力学 10 講」

J.J. サクライ「現代の量子力学 (上)・(下)」

## 量子情報

**概要** 量子論を情報理論的な観点から理解しようとする分野。測定という操作の影響を明示的に考えることが重要となるとともに、ベルの不等式の破れを引き起こすエンタングルメントが中心的な概念となっている。量子コンピュータへの応用が非常に盛んに研究されている。

**難易度** ☆☆☆

**主な前提知識** 量子論

**主な教科書**

石坂智 他「量子情報科学入門」

沙川貴大・上田正仁「量子測定と量子制御」

古澤明・武田俊太郎「量子光学と量子情報科学」

## 場の量子論

**概要** 時空上の各点で値をもつような、「場」と呼ばれる無限自由度の物理量についての量子論である。粒子の生成消滅などを扱うことができ、素粒子の標準模型を記述するのに用いられているほか、準粒子という概念によって物性物理にも応用

されている。ゲージ場について詳しく学ぶこともできる。

難易度 ☆☆☆

主な前提知識 解析力学, 量子力学, 特殊相対論

主な教科書

坂本真人「場の量子論・II」

九後汰一郎「ゲージ場の量子論 I・II」

ワインバーグ「場の量子論 1~6 巻」

Peskin・Schroeder「An Introduction to Quantum Field Theory」

## 一般相対論

概要 すべての座標系において物理法則は不変という立場から重力を説明した理論である。理解するためには比較的高度な数学が必要であるが、重力波やブラックホールなど、面白い話題は多い。

難易度 ☆☆☆

主な前提知識 特殊相対論

主な教科書

シュッツ「相対論入門」

井田大輔「現代相対性理論入門」

内山龍雄「一般相対性理論」

ミスナー他「重力理論」

## 弦理論

概要 量子重力理論を含むような究極の理論の候補の一つ。基本的な構成要素として、大きさを持たない点ではなく、1次元的な広がりを持つ弦を考えることで、その様々な振動モードによって異なる素粒子を表現できると考えられている。また、近年 AdS/CFT 対応と呼ばれる対応関係が他分野においても注目を集めている。

難易度 ☆☆☆

主な前提知識 解析力学, 特殊相対論, 量子力学, 場の量子論

主な教科書

Becker 他「String Theory and M-Theory: A Modern Introduction」

ポルチンスキー「ストリング理論 第1・2巻」

## 熱力学

**概要** マクロな系の性質を扱う分野である。マクロな物質は一般に莫大な自由度を持つにもかかわらず、平衡状態のマクロな性質に関しては、エントロピーという熱力学に特有の量を1つ導入するだけで、数個のパラメータで記述することができる。個々の物質の性質によらない強大な普遍性を持つのがこの分野の魅力である。

**難易度** ☆

**主な前提知識** 特になし

**主な教科書**

清水明「熱力学の基礎 I・II」

## 統計力学

**概要** マクロな系が莫大な数の構成要素からなることに注目することで、ミクロとマクロを継ぐことを目指す理論である。量子力学などのミクロな粒子についての理論を用いて、熱力学だけではわからない部分を補完することができる。発展的な事項として、相転移や非平衡統計力学について学ぶこともできる。

**難易度** ☆☆

**主な前提知識** 熱力学, 量子力学

**主な教科書**

田崎晴明「統計力学 I・II」

高橋和孝・西森秀稔「相転移・臨界現象と繰り込み群」

沙川貴大「非平衡統計力学」

## 流体力学

**概要** 空間的に広がりをもった物質を扱う連続体力学の中で、液体や気体といった流体を扱う分野である。ベクトル解析や複素解析を使った議論で、他と比べると計算量が多いが、身の回りにあふれている「流れ」という現象について記述する能力は非常に強力である。

**難易度** ☆

**主な前提知識** ベクトル解析

**主な教科書**

巽友正「流体力学」

今井功「流体力学」

## 物性物理

**概要** 固体を中心とした物質の性質を物理学を用いて調べる分野。超伝導や磁性などの現象を、主に量子多体系としての観点から理解することを目指している。トポロジカル物性といった数理的な側面に特に注目した理論を学ぶこともできる。

**難易度** ☆☆☆

**主な前提知識** 量子力学、統計力学

**主な教科書**

浅野健一「固体電子の量子論」

加藤岳生「物性物理学講義」

野村健太郎「トポロジカル絶縁体・超伝導体」

## 宇宙物理

**概要** 恒星や星間物質、ブラックホール、さらには宇宙そのものまで、宇宙に存在する様々な階層でおこる現象を物理学を用いて調べる分野である。基礎的な物理学の成果の多くを利用する総合的な分野であり、様々な理論が活かせるのも魅力である。

**難易度** ☆☆☆

**主な前提知識** 内容によるが、流体力学、一般相対論、電磁気学、統計力学など

**主な教科書**

松原隆彦「宇宙論の物理(上)・(下)」

福江純 他「宇宙流体力学の基礎」

小畠康史 他「ブラックホール宇宙物理の基礎」

## 生物物理

**概要** 生物物理学とは、生体を構成する物質の動的メカニズムを明らかにし、さらに、それらで構成された生体組織の各階層間をつなぐ原理原則を見出すことによって生命を理解しようという学問分野である。相転移やソフトマターなどの観点から細胞で起こる現象を考えるほか、力学系などを用いて生命システムの普遍

的性質を探ることもできる.

難易度 ☆☆

主な前提知識 内容によるが, 熱力学, 統計力学, 力学系, 電磁気学など

主な教科書

鳥谷部祥一 他「生物物理学」

金子邦彦「普遍生物学」

望月 敦史「理論生物学概論」

## 数理物理

概要 数学を用いて物理学をより体系的に, あるいはより厳密に記述しようとする分野. 微分幾何を用いたゲージ理論や一般相対論の記述や, 関数解析を用いた量子力学の正当化が代表的であるが, 他にも様々なトピックが考えられる.

難易度 ☆☆☆

主な前提知識 内容によるが, 量子論, 相対論, 微分幾何, 関数解析など

主な教科書

佐古彰史「ゲージ理論・一般相対性理論のための微分幾何学入門」

小池直之「理論物理に潜む部分多様体幾何」

新井朝雄・江沢洋「量子力学の数学的構造 I・II」

新井朝雄「量子現象の数理」

前田吉昭・佐古彰史「幾何学の量子化」

ヒューネン「圏論的量子力学」