抽象積分入門

小林愼一郎

このPDFは,数物セミナー春の大談話会in慶應の追加資料です.箇条書きを文章に起こしたような感じで前後のつながりが見えにくいかもしれませんが,ご容赦ください.

1 Riemann積分の復習, Lebesgue積分の考え方

1.1 Riemann積分可能性

有界閉区間$[a,b]$上の有界な実数値関数fに対して,以下のようにしてRiemann積分可能性を定義する.

区間$[a,b]$の分割$\Delta\colon a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$に対して,各小区間$[x_k,x_{k+1}]$の長さの最大値を分割$\Delta$の幅といい,$|\Delta|$と表す.すなわち,

$$|\Delta|=\max_k(x_{k+1}-x_k)$$

とする.
また,各小区間$[x_k,x_{k+1}]$におけるfの上限,下限をそれぞれM_k, m_kとする.すなわち,

$$M_k=\sup\{\,f(x)\mid x\in[x_k,x_{k+1}]\,\},m_k=\inf\{\,f(x)\mid x\in[x_k,x_{k+1}]\,\}$$

とする.fは有界と仮定しているので,全てのkに対してM_k, m_kが定義できる.
このM_k, m_kと分割Δを用いて,fの過剰和S_Δ,不足和s_Δを

$$S_\Delta=\sum_{k=0}^{n-1}M_k(x_{k+1}-x_k), s_\Delta=\sum_{k=0}^{n-1}m_k(x_{k+1}-x_k)$$

とそれぞれ定義する.
fがRiemann積分可能であるとは,

$$\lim_{|\Delta|\to 0}(S_\Delta-s_\Delta)=0 \tag{1}$$

が成り立つこと,と定義する.

高校のとき,私たちは閉区間上の連続関数の積分のみを扱っていた.すなわち,以下のことを暗に認めていたのである.

定理1.1 有界閉区間上の実連続関数はRiemann積分可能である.

定理1.1の逆は一般には成り立たない.すなわち,Riemann積分可能であって不連続点が存在するような有界閉区間上の実関数が存在する.例えば,関数$f\colon[-1,1]\to\{0,1\}$を,

$$f(x)=\begin{cases}1 & (x=0)\\ 0 & (\text{otherwise})\end{cases}$$

と定める. 記号は上のものを使うことにすると, 明らかに $s_\Delta = 0$. また, 0 を含む小区間 $[x_i, x_{i+1}]$ を考えると, $M_i = 1$. $|\Delta| \to 0$ とすれば, $S_\Delta \to 0$ となる. 従って, $\lim_{|\Delta| \to 0}(S_\Delta - s_\Delta) = 0$ が成り立つので, f は Riemann 積分可能である.

一般に, 有界閉区間上の有界な実連続関数は, 不連続点全体の集合が高々可算なら Riemann 積分可能である. 不連続点全体の集合が非可算だと Riemann 積分可能でない関数が存在する. 例えば, $f\colon [0,1] \to \{0,1\}$ で, $f(x) = 1(x \in \mathbb{Q}), 0(\text{otherwise})$ と定める (これを Dirichlet 関数という). 有理数, 無理数はどちらも $\mathbb{R}$ において稠密に存在するので, 任意の k に対して $M_k = 1, m_k = 0$. したがって, $S_\Delta = 1, s_\Delta = 0$. $\lim_{|\Delta| \to 0}(S_\Delta - s_\Delta) = 1 \neq 0$ なので, f は Riemann 積分可能でない.

1.2　極限と積分の可換性

関数からなる列を関数列という. 関数列の極限をとってから積分をしたときに求まる値と, 積分をしてから極限をとって求まる値はいつでも等しいといえるだろうか？答えは No である.
ここで, 1 つ用語を定義しておく.

定義 1.1　関数 $f_n, f\colon I \to \mathbb{R}$ が与えられていて, 各 $x \in I$ を固定するごとに定まる実数列 $\{f_n(x)\}$ が実数 $f(x)$ に収束するとき, 関数列 $\{f_n\}$ は f に**各点収束**するという.

関数 $f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ $(n \geq 2)$ を,

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x & (0 \leq x < \frac{1}{n}) \\ -n^2 x + 2n & (\frac{1}{n} \leq x < \frac{2}{n}) \\ 0 & (\frac{2}{n} \leq x \leq 1) \end{cases}$$

と定める. 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $\int_0^1 f_n(x)dx = 1$ である. 従って, $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = 1$ を得る. 一方, f は $x \in [0,1]$ を固定するごとに 0 に収束する. 上の定義 1.1 の言葉を使えば, 関数列 $\{f_n\}$ は 0 に各点収束する. したがって, $\int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx = 0$ を得る.
この例から, 積分と極限操作は必ずしも可換でないことがわかる.

1.3　Lebesgue 積分の考え方

お金が 50 円,100 円,500 円,100 円,1000 円,500 円,100 円の順に出されていったとき, これらの総額を求める方法を考える. やりかたとしては, 2 つあげられる.

方法 1　出されていった順に足し上げる. すなわち,

$$50 + 100 + 500 + 100 + 1000 + 500 + 100$$

を計算する.

方法 2　同じ金額のものをまとめてから, 足し上げる. すなわち,

$$50 \times 1 + 100 \times 3 + 500 \times 2 + 1000 \times 1$$

を計算する.

これを積分の言葉に置き換える. ここで, k 番目に出された金額を a_k 円とする. お金の総額は, 関数 $f\colon [0,7] \to \mathbb{R}$, $f(x) = a_1\chi_{[0,1]}(x) + \sum_{k=2}^{7} a_k\chi_{(k-1,k]}(x)$ (χ_A は A 上の特性関数) を積分することによって与えられる.
方法 1 は, Riemann 積分の考え方に対応している. 一方, 方法 2 は, f がとりうる各値 a に対して, $f(x) = a$ となる $x \in [0,7]$ 全体の集合 (すなわち $f^{-1}(a)$) の "大きさ" $m(f^{-1}(a))$ を "測って", a について和 $\sum_a a \cdot m(f^{-1}(a))$ を求めていると考えられる. これこそが Lebesgue 積分の考え方に対応している.
ここで, 主に 2 つのことが定義されてなければならない.

- 上の各 a に対して集合 $f^{-1}(a)$ の "大きさ" が定義されてなければならない. $\longleftarrow$ "測度" に対応している
- そもそも集合 $f^{-1}(a)$ の大きさを "測る" ことができなければならない. $\longleftarrow$ "可測関数" に対応している

以下, 本題に入る.

2 σ-加法族, 測度

測度というのは, 集合族で定義された関数である. 測度の定義域にあたるものが σ-加法族である. σ-加法族に対して以下の要請をする.

定義 2.1 集合 $X(\neq \emptyset)$ の部分集合族 $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{P}(X)$ が以下の 3 つの条件を満たすとき, $\mathfrak{F}$ を X 上の **σ-加法族**という.
(1) $\emptyset \in \mathfrak{F}$
(2) $A \in \mathfrak{F} \Longrightarrow A^c \in \mathfrak{F}$
(3) $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathfrak{F} \Longrightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathfrak{F}$.
σ-加法族の要素になっている集合を**可測集合**, 集合 X と X 上の σ-加法族 $\mathfrak{F}$ の組 $(X, \mathfrak{F})$ を**可測空間**という.

例 1（自明な例） 集合 X の部分集合族 $\{\emptyset, X\}$ は X 上の σ-加法族.
また, X の部分集合族として X のべき集合 $\mathfrak{P}(X)$ を考えてもこれは X 上の σ-加法族.
$|X| \geq 2$ なる集合 $X, \emptyset \neq A \subset X$ に対して, $\{\emptyset, A, A^c, X\}$ は X 上の σ-加法族.
このことから, 1 つの集合に対して考えられる σ-加法族は 1 通りとは限らないことがわかる.

定義 2.1 の要請だけで, σ-加法族に対して期待できる性質が証明できる.

命題 2.1 $(X, \mathfrak{F})$ を可測空間とすると, 以下のことが成り立つ.
(1) $X \in \mathfrak{F}$
(2) $A, B \in \mathfrak{F} \Longrightarrow A \cup B, A \cap B, A \setminus B \in \mathfrak{F}$
(3) $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathfrak{F} \Longrightarrow \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathfrak{F}$

定義 2.2 $(X, \mathfrak{F})$ を可測空間とする. 集合関数 $\mu\colon \mathfrak{F} \to [0, +\infty]$ が以下の 2 つの条件を満たすとき, μ を $\mathfrak{F}$ 上の**測度**という.
(1) $\mu(\emptyset) = 0$
(2) $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathfrak{F}, A_i \cap A_j = \emptyset (i \neq j) \Longrightarrow \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$
測度の定まった可測空間 $(X, \mathfrak{F}, \mu)$ を**測度空間**という.

測度に関しても, この 2 つの要請だけで, 期待できる性質が証明できる.

命題 2.2 $(X, \mathfrak{F}, \mu)$ を測度空間とすると, 以下のことが成り立つ.
(1) $A, B \in \mathfrak{F}, A \cap B = \emptyset \Longrightarrow \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$
(2) $A, B \in \mathfrak{F}, A \subset B \Longrightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$ (**単調性**)
(3) $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathfrak{F} \Longrightarrow \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$ (**劣加法性**)

例 2 $(X, \mathfrak{P}(X))$ を可測空間とする. 各 $A \subset X$ に対し,

$$\gamma(A) = \begin{cases} |A| & (A\colon \text{finite}) \\ +\infty & (A\colon \text{infinite}) \end{cases}$$

と定める (ただし, $|A|$ は A に属する要素の個数). γ は $\mathfrak{P}(X)$ 上の測度になる. これを**数え上げ測度**という.

例 3 $(X, \mathfrak{F})$ を可測空間とする. 各 $A \in \mathfrak{F}$ に対し,

$$n(A) = 0$$

と定めると, n は測度になる. これを**零測度**という.

例 4 Lebesgue 測度はつらいので割愛します. すみません. ただ, d 次元 Lebesgue 測度というのは, $\mathbb{R}^d$ の部分集合に d 次元体積を与えるようなものだと思ってください. (例えば, 2 次元 Lebesgue 測度は面積を与える.)

3 可測関数, 積分

このセクションでは, 可測関数の積分を定義する. 以下, 測度空間 $(X, \mathfrak{F}, \mu)$ を固定する.

定義 3.1 関数 $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}} (= \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\})$ が**可測**であるとは, 任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して

$$f^{-1}((a, +\infty)) \in \mathfrak{F}$$

が成り立つこと, と定義する.

X 上の可測関数は線形空間をなすことが次からわかる.

命題 3.1 $f, g\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ が可測ならば, $\alpha f + \beta g$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$ も可測関数である.

次に積分を定義する上で重要な, 特性関数の可測性に関する命題を証明する.

命題 3.2　部分集合 $E \subset X$ に対し, E 上の特性関数 χ_E が可測 $\Longleftrightarrow E \in \mathfrak{F}$

証明

$$\chi_E^{-1}((a,+\infty)) = \begin{cases} \emptyset & (a \geq 1) \\ E & (0 \leq a < 1) \\ X & (a < 0) \end{cases}$$

から明らか. ∎

命題 3.1 と 3.2 から, $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{E_i}$ $(\alpha_i \in \mathbb{R}, E_i \in \mathfrak{F})$ は可測である. この形の関数を**単関数**という.

命題 3.3　非負の可測関数 f に対して, 非負の単関数の列 $\{\varphi_n\}$ がとれて $\varphi_n \uparrow f$ とできる.

これから積分を定義していく.

定義 3.2（単関数の積分）　単関数 f が $f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{E_i}$ $(\alpha_i \in \mathbb{R}, E_i \in \mathfrak{F}, E_k \cap E_l = \emptyset (k \neq l))$ で与えられているとき, f の測度 μ による**積分**を, $\int_X f d\mu$ と書き,

$$\int_X f d\mu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(E_i)$$

と定義する.

注　一つの単関数の表示は一通りとは限らないので, 上の定義が well-defined であることを確認しなければならない. すなわち, 単関数 f が $f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi E_i = \sum_{j=1}^{m} \beta_j \chi_{F_j}$ で表されているとき, $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(E_i)$ と $\sum_{j=1}^{m} \beta_j \mu(F_j)$ が等しいことを示さなければならない. 証明は読者の課題とする.

定義 3.3（非負可測関数の積分）　非負可測関数 f に対して, 命題 3.3 から非負単関数の列 $\{\varphi_n\}$ がとれて $\varphi_n \uparrow f$ とできる. そこで, f の μ に関する積分を

$$\int_X f d\mu = \lim_{n \to \infty} \int_X \varphi_n d\mu$$

と定義する.

注　これも well-defined であることを確認しなければならない.

定義 3.4（一般の可測関数の積分） 一般の可測関数 f は, $f^+ = \max\{f, 0\}, f^- = \max\{-f, 0\}$ を用いて $f = f^+ - f^-$ と 2 つの非負可測関数の差で表せる. そこで, f の μ による積分を,

$$\int_X f d\mu = \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu$$

と定義する.

上の定義において, $\int_X f^+ d\mu, \int_X f^- d\mu$ のうち少なくとも一方が有限ならば, $\infty - \infty$ の形を回避できる. このとき, f は**積分確定**であるといい, $\int_X f^+ d\mu, \int_X f^- d\mu$ のどちらも有限ならば, $\int_X f d\mu$ の値が定まる. このとき, f は **(Lebesgue) 積分可能**であるという.
可測関数 f が積分可能 $\iff \int_X |f| d\mu < +\infty$ である.

例 5 零測度による積分の値は 0 である. したがって, 任意の可測関数 f は積分可能である.

例 6 $(\mathbb{N}, \mathfrak{P}(\mathbb{N}), \gamma)$ を測度空間とする. 任意の実数列 $a\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ は可測である. 数列 a の数え上げ測度 γ による積分は,

$$\int_{\mathbb{N}} a d\gamma = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

である. 数列 a が積分可能であることと, 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が絶対収束することは同値である.

4 収束定理

このセクションでは, 極限と積分が交換可能であるための十分条件をいくつか述べる.

定理 4.1（単調収束定理） 非負可測関数の列 $\{f_n\}$ が, 各点 $x \in X$ で

$$f_i(x) \leq f_{i+1}(x) \ (i = 1, 2, \dots)$$

を満たしているとき, 各点収束の極限関数 $\lim_{n\to\infty} f_n$ も可測で,

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X \left(\lim_{n\to\infty} f_n \right) d\mu$$

が成り立つ.

単調収束定理を関数 $\sum_{i=1}^{n} f_i \ (f_i \geq 0)$ に適用すれば, $\sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n \right) d\mu$ を得る.
これを測度空間 $(\mathbb{N}, \mathfrak{P}(\mathbb{N}), \gamma)$, 非負二重数列 $a_{m,n}$ に適用すれば, $\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_{m,n} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{m,n}$ を得る.

定理 4.2（Lebesgue の収束定理） 可測関数 f_n と積分可能な可測関数 g が与えられていて,

$$|f_n| \leq g$$

を満たすとき, f_n の各点収束の極限関数 $\lim_{n\to\infty} f_n$ も積分可能で,

$$\lim_{n\to\infty}\int_X f_n d\mu = \int_X \left(\lim_{n\to\infty} f_n\right) d\mu$$

が成り立つ.

関数 g が定数関数 $M \geq 0$ のとき, $\mu(X) < +\infty$ なら, Lebesgue の収束定理が成り立つ. これを, **Lebesgue の優収束定理**という.

Lebesgue の収束定理はさまざまなところで使われる. 例えば, 次の命題を証明するときに使われる.

命題 4.1 X 上の可測関数の族 $\{f_t\}(t \in (a,b))$ と積分可能な非負関数 φ が与えられていて, 各点 $x \in X$ に対して

$$|f_t(x)| \leq \varphi(x)\ (\forall t \in (a,b)),\ \lim_{t\downarrow a} f_t(x) = f(x)$$

を満たすなら, f も可測で,

$$\lim_{t\downarrow a}\int_X f_t d\mu = \int_X f d\mu$$

が成り立つ.

上の命題の証明は省略するが、これを認めることにすると積分記号のもとの微分について, 以下のことが言える.

命題 4.2 $X \times (a,b)$ 上の関数 $f(x,y)$ に対して, y を固定するごとに x について積分可能で, かつ y で偏微分可能で $X \times (a,b)$ 上で

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \leq \varphi$$

となる積分可能な非負関数 φ が存在するなら,

$$\frac{d}{dy}\int_X f(x,y)d\mu = \int_X \frac{\partial f}{\partial y} d\mu$$

が成り立つ.

これは平均値の定理と先ほど fact にした命題から直ちに示せる. この命題を使った具体例を最後にやって終わりとする.

例 7

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\cos ax dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-\frac{a^2}{4}}$$

左辺を $I(a)$ とおくと, $\left|xe^{-x^2}\sin ax\right| \leq xe^{-x^2}$ で, xe^{-x^2} が積分可能であることを認めて, 先ほどの命題を使っ

て計算すると,

$$I'(a) = -\int_0^\infty xe^{-x^2} \sin ax dx = -\frac{a}{2} I(a)$$

を得る. この微分方程式を解くと,

$$I(a) = I(0)e^{-\frac{a^2}{4}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\frac{a^2}{4}}$$

を得る.

参考文献

[1] 杉浦光夫, 解析入門, 東京大学出版会

[2] 折原明夫, 測度と積分, 裳華房

[3] 盛田健彦, 実解析と測度論の基礎, 培風館

[4] 伊藤清三, ルベーグ積分入門, 裳華房