

# 確率微分方程式と Coherence Resonance

津崎 祥多

大阪府立大学工学部数理工学科 4 年

2014 年 12 月 21 日

## 1 はじめに

### 1.1 ノイズは森羅万象に存在する

ノイズは森羅万象に存在する。夜空に舞う雪、株価の複雑な変動、脳の中を駆け巡る神経パルスのような不規則だが興味が尽きない現象は、果たして決定論的な立場で記述することはできるのだろうか。このような現象は決定論的な立場で記述することはできないとされている。しかしこういう反論があるだろう。「あらゆる分子の動きを事前に知る悪魔がいたら、決定論的にわかるのではないか？」Laplace の悪魔という有名な反論である。実際には、考えるべき分子の個数は Avogadro 定数のオーダーにも及び、それらの様子が完全にわかることは期待できない。たとえ分かったとしても、膨大な自由度をもつ運動方程式を解くことは到底不可能なのである。さらに近年、少数自由度の系ですら初期値が少しでも変わっただけで結果が大きく異なることがあり得るということが分かってきた。「ブラジルで蝶が羽ばたけばテキサスでトルネードが起こる」いわゆるカオス理論である。要するに、Laplace の悪魔がいかに優秀な数学者であろうと、未来を「確実に」予測することは不可能なのである。『Ignoramus et ignorabimus（我々は知らない、知ることはないだろう）』ドイツの生理学者レーモンの有名な標語であるが、畢竟するに、無機現象も、人間や動物の集団が示す社会現象も、そして生命現象にも、ノイズは至るところ不可避的に存在してしまうのである。上記の現象では、雪を揺らすそよ風、株を動かす企業や国家による人為的な影響、ニューロン間における複雑な相互作用といった要因がこれにあたる。しかしながら、我々には確率的に振る舞う現象さえも記述したい、予測したいという欲求がある。その欲求に応えるものが確率微分方程式である。確率微分方程式とは、日本人の大数学者伊藤清により理論づけられた、決定論的な方程式にノイズの項を加えた方程式のことである。これを用いれば、上述した不規則な現象を表現できることが知られている。

### 1.2 Coherence Resonance

確率微分方程式系で記述される現象に実に興味深いものがある。それは邪魔であると考えられてきたノイズが役に立つ現象である。その 1 つである Coherence Resonance は、興奮系の振る舞いを良くするものとして知られている。

以下のような最も単純な興奮系である Fitz Hugh-Nagumo 系を考える：

$$\begin{aligned}\epsilon \frac{dx}{dt} &= x - \frac{x^3}{3} - y, \\ \frac{dy}{dt} &= x + a.\end{aligned}$$

この系のアトラクタ（力学系の向かう集合）は、 $|a| > 1$  では、安定な固定点（動かない点）であり、 $|a| < 1$  では、リミットサイクル（相空間上の閉軌道）である。この振る舞いこそが興奮系の持つ性質であるが、この興奮系にノイズを加えるとどうなるであろうか。ある適度なノイズを加えると、臨界パラメータ（分岐パラメータ）が伸びるのだ。つまり、アトラクタがリミットサイクルになる臨界パラメータ  $|a|$  の値が大きくなるのである。このことは、生体の感覚器や神経ネットワークの機能発現に利用されていると考えられている。

## 2 講演内容

本講演では、ノイズの代表例である Brown 運動を説明する中で、ノイズの性質を見ていく。そして、代表的な確率微分方程式である Langevin 方程式を紹介し、確率微分方程式を概説する。また、力学系の基本的な知識を確認した後、興奮系を説明する。その後、Coherence Resonance によって、興奮系の振る舞いがどのように良くなるのか、つまりどのように「ノイズが役に立つ」のかを見ていきたい。

## 参考文献

- [1] V.S. Anishchenko, V.V. Astakhov, A.B. Neiman, T.E. Vadivasova, and L.Schimansky-Geier, *Nonlinear Dynamics of Chaotic and Stochastic Systems*, Springer, (2002).
- [2] Morris W. Hirsch, Stephen Smale, and Robert L. Devaney 著, 桐木紳, 三波篤郎, 谷川清隆, 辻井正人訳, *力学系入門—微分方程式からカオスまで—*, 共立出版, (2007).
- [3] Bambi Hu and Changsong Zhou, Phase synchronization in coupled nonidentical excitable systems and array-enhanced coherence resonance, *PHYSICAL REVIEW E*, VOLUME 61, NUMBER 2, FEBRUARY (2000).
- [4] B. Linder and L. Schimansky-Gerier, Analytical approach to the stochastic FitzHugh-Nagumo system and coherence resonance, *PHYSICAL REVIEW E*, VOLUME 60, NUMBER 6, DECEMBER (1999).
- [5] Edward Ott, *Chaos in Dynamical Systems Second Edition*, CAMBRIDGE, (2008).
- [6] Arkady S. Pikovsky and Jürgen Kurths, Coherence Resonance in a Noise-Driven Excitable System, *PHYSICAL REVIEW LETTERS*, VOLUME 78, NUMBER 5, 3 FEBRUARY (1997).
- [7] Alwyn C. Scott, The electrophysics of a nerve fiber, *Review of Modern Physics*, Vol.47, No.2, April (1975).
- [8] Steven H. Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos*, Westview Press, (2001).
- [9] Kurt Wisenfeld, David Pierson, Eleni Pantazelou, Chris Dames, and Frank Moss, Stochastic Resonance on a Circle, *PHYSICAL REVIEW LETTERS*, VOLUME 72, NUMBER 14, 4 APRIL (1994).
- [10] Changsong Zhou, Jürgen Kurths, and Bambi Hu, Array-Enhanced Coherence Resonance: Non-trivial Effects of Heterogeneity and Spatial Independence of Noise, *PHYSICAL REVIEW LETTERS*, VOLUME 87, NUMBER 9, 27 AUGUST (2001).
- [11] 相沢慎一, 堤昌文, 八名和夫, *ゆらぎの科学* 6, 森北出版, (1996).
- [12] 伊藤清, 渡辺信三, 重川一郎, *確率論ハンドブック*, 丸善出版, (2012).
- [13] 江沢洋, *だれが原子をみたか*, 岩波現代文庫, (2013).
- [14] 太田隆夫, *非平衡系の物理学*, 昇華房, (2005).
- [15] I. カラザス, S.E. シュレーブ, 渡邊壽夫訳, *ブラウン運動と確率積分*, 丸善出版, (2001).
- [16] 北原和夫, 小杉幸夫, 諫早俊夫, *ゆらぎの科学* 3, 森北出版, (1993).
- [17] 佐藤俊輔, 池内了, 細谷昂, *ゆらぎの科学* 10, 森北出版, (1999).
- [18] 戸田盛和, 斎藤信彦, 久保亮五, 橋爪夏樹, *統計物理学*, 岩波書店, (1972).
- [19] 舟木直久, *確率微分方程式*, 岩波書店, (1997).
- [20] 舟木直久, *確率論*, 朝倉書店, (2012).
- [21] 保江邦夫, *数値確率解析入門*, 朝倉書店, (2000).