オイラーの五角数定理
~ならべごま！~

岡山大学理学部物理学科 2 年
佐藤帯子

2014 年 12 月 21 日

1. はじめに

レオンハルト・オイラー(Leonhard Euler, 1707-1783)は，18 世紀を代表する数学者であり，純粋数学と応用数学の広い範囲にわたり並外れた業績を残した．その後の数学・物理学・天文学に多大な影響を与え，オイラーの名のついた定理や公式は数えきれないほどある．

オイラーの膨大な著作のうち，『無限解析序説』（1748, 全 2 巻)の第 I 巻には，無限級数，無限乗積，無限連分数といったあらゆる「無限」を系統的に扱うためのアイデアがまとめられている．この中の第 16 章「数の分割」に，「五角数定理」という名の非自明な恒等式についての記述がある．オイラーは 1741 年に五角数定理を発見したが，自身による証明を得たのは 1750 年であり，証明まで 10 年近くを要したという．つまり，『無限解析序説』が出版された時点では，まだ証明されていなかったのである．本講演はこの五角数定理の証明を目的とする．

オイラーの五角数定理(Euler's pentagonal number theorem)とは，qを不定元として，次式が恒等式となることを主張した定理である．

$$\prod_{k=1}^{\infty}(1-q^k)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}(-1)^n q^{\frac{n(3n-1)}{2}}$$

左辺の無限乗積$(1-q)(1-q^2)(1-q^3)(1-q^4)\cdots$を展開すると，負号のせいでいくつかの項が打ち消しあい，$1-q-q^2+q^5+q^7-q^{12}-q^{15}+q^{22}+\cdots$ という無限級数が得られる．q^nの係数に 0，± 1 しか出てこないだけでなく，なんとqの肩に現れる数列が五角数となっているのである．五角数定理という名称はこのためである．

2. 内容

現在，五角数定理には，ヤコビの三重積公式を用いる証明や，組み合せ論的証明もあり，今回は後者を主に紹介する．1881 年にフランクリンによって発見されたこの証明は，点を並べたフェラーズグラフという図を用いて全単射をつくるというものであり(参考文献[1])，今回は実際に図を示しながら五角数が現れてくる様子を楽しんでいただけたらと思う．予備知識を要しない内容であり，組み合せ論についてもあまり深く取り上げない．

3. 参考文献

[1] G.アンドリュース，K.エリクソン，整数の分割，佐藤文広訳，数学書房，2006.

[2] 野海正俊，オイラーに学ぶ―無限解析序説への誘い，日本評論社，2007.

[3] 山田裕史，組合せ論プロムナード，日本評論社，2009.

[4] L. Euler，*Introductio in Analysin Infinitorum*,　Tomus Primus, 1748.（『無限解析序説』全 2 巻)

[5] L. オイラー，高瀬正仁訳，オイラーの無限解析，海鳴社, 2001. ([4]の第 I 巻の邦訳)