n 次方程式の解の公式

兵庫県立大学理学部生命科学科 3 年
中川 幸大

2015 年 6 月 14 日

1 はじめに

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

このアブストラクトを見ている人で、この式を知らない人は恐らくいないであろう．この式は勿論、方程式 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ の解の公式である. 中学生の時に、丸暗記した記憶のある人もいるだろう．しかし、高校生になって 3 次方程式の解き方を習うが、解き方は因数分解や、1 つの実数解を因数定理で見つけ、次数を下げるといった実に応用の効かない方法である.「3 次方程式の解の公式はないのだろうか？」と疑問に感じるのは自然なことである．結論から言うと、3 次方程式の解の公式は存在する.「じゃあ、4 次方程式は？ n 次方程式は？」想像が膨らむ．しかし残念なことながら、4 次方程式の解の公式までは存在するが、5 次以上になると解の公式が存在しない. 言い換えれば、5 次以上の方程式の一般解は代数的に解くこと、つまり有限回の四則演算と開方を用いて書くことはできない．3 次方程式以上の解の公式の歴史は比較的新しく、3 次方程式についてはタルターリャ、4 次方程式についてはフェラリによって 16 世紀に発見された．引き続き 5 次方程式の解の公式を導出する試みは多くの人によって行われたが成功せず、1824 年にアーベルが一般の 5 次以上の方程式の解の公式が存在しないことを証明した. またアーベルは、何次の方程式であっても代数的に解ける方程式が存在しているということも示した．しかし、どのような方程式が代数的に解けるのか…それは長年の謎であった. この答えは、ガロアが導き出したのであった。今日、ガロア理論と呼ばれているのがそれである.

2 講演内容

本講演ではまず、3 次方程式及び 4 次方程式の解の公式を導出する. 方法としてはそれほど難しくはないが、式が非常に煩雑になるため厄介に見えるかもしれない. その後、これら 2 つの解の公式の特徴から 5 次方程式の解の公式が存在しないことを証明する旅に出ることにしよう. 旅の途中では基本対称式や置換群、体の添加など初学者にとっては概念の難しいものが出てくるが、出来るだけ分かりやすく解説するつもりである.

参考文献

[1] 彌永昌吉 (2004)『ガロアの時代　ガロアの数学—第一部 時代篇』シュプリンガー・フェアラーク東京株式会社
[2] 結城浩 (2012)『数学ガール　ガロア理論』ソフトバンククリエイティブ
[3] 石井俊全 (2013)『ガロア理論の頂を踏む』ベレ出版