n 次元体積と初等積分

泉原健吾

九州大学理学部物理学科 2 年

2015 年 12 月 19 日

1　はじめに

n 次元体積と聞くと、数学屋特有の何でも一般化したがる趣味の産物というイメージをもつかもしれませんね。実際、数学という学問において特殊の 3 次元で定義されたものは何かしらの形で一般の次元へと拡張されるべき、というのは自然な発想でしょう。しかしながら、実はこの n 次元体積という概念は、そういった思想とは全く別に積分法の視点から必然的に生じてきたものであるのです。積分法は、理系大学生なら誰でも空気のように使っている馴染み深い概念ですが、その重要性に反して積分本来の意味をきちんと教わる機会はあまりありません。加えて、積分計算を実行することはその意味を理解することとは独立していて、多くの場面で前者のみが必要とされます。そういう要因があってか、理系の学生でも積分は微分の逆演算のことだ等々の不正確な理解をしている人をしばしば見かけます。積分法の基本理念はその広範な応用領域からも分かるように非常に画期的で興味深いものですし、それを理解することは積分の諸性質 (線型性や単調性など) を直感的なものにしてくれる有意義なものです。

2　講演内容

n 次元体積という概念について、前半ではそれが積分法において自然なものであることの理論的な説明をします。今回は Riemann の定式化による n 変数実数値関数の積分を基礎にして考察をします。後半では n 次元体積という一見不思議な量の描像を得てもらうため、具体例として n 次元球の体積を計算します。これは物理学においても登場する実用的な話題ですが、その導出はトリッキーで答えを保証する以上のものでないことが多いです (例えば参考文献 [2] 付録 A-3)。そこで今回は n 次元球を考えて、率直に積分して求めます。ここまでで連想された方も多いと思いますが、上に述べてきた”n 次元体積”とは、測度論の言葉を借りると”Euclid 空間上の測度”となります。測度の概念はこれより遥かに広い適用領域を持

つ重要なものですし、本発表に最も密接に関係する分野とすら言えます。ですが今回は測度論の橋渡しのレベルを想定しており、これを露わに使わないことをここで断っておきます。

参考文献

[1] 杉浦光夫, 『解析入門』
[2] 田崎晴明, 『統計力学』
[3] 伊藤清三, 『ルベーグ積分入門』