数の概念の拡張: 位相幾何学からのアプローチ

早稲田大学基幹理工学部数学科 3 年 杉ノ内 萌 *

2015 年 5 月 23 日

1 イントロダクション

人類は数の概念を長い歴史の中で徐々に拡張してきた. これについて少し振り返りたい.

ものを数える際に自然と現れる自然数の概念から始まり, 整数と有理数を考えた. 定式化は容易ではなかったが, 解析学などの要請から, 実数というものも構成した. 代数方程式を解くという観点から複素数というものも考えられた. これ以上知らないという方もいらっしゃるかもしれないが, 物理学を学んでいる方はスピノールという概念の記述に Hamilton の四元数を使ったことだろう. マイナーなものとして, Cayley の八元数というものも知られている.

さて, 有理数までは (自然数の体系を認めれば) 容易に構成できることから, 実数以降の数の概念について考えよう. 実数全体を $\mathbb{R}$, 複素数全体を $\mathbb{C}$, 四元数全体を $\mathbb{H}$, 八元数全体を $\mathbb{O}$ で表すことにする. これらの元はそれぞれ, $1, 2, 4, 8$ 個の実数で表されることから, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$, $\mathbb{O}$ はそれぞれ $1, 2, 4, 8$ 次元の実ベクトル空間である. これ以外の “数の体系” は聞かないが, 実は, 本講演において次が証明される:

定理 1
$1, 2, 4, 8$ 次元以外の “数の体系” は存在しない.

本講演の目的は, この定理の位相幾何学による証明の概略を解説することである.

2 講演内容

次のような内容を扱う.

1. “数の体系” を正確に定義する. その上で, “数の体系の存在” が幾何学とどのように関わるのかについて考える.
2. ベクトル束という概念を導入する.
3. 性質の良い空間 X に対して環 $K(X)$ と $\tilde{K}(X)$ を定義し, その基本的な性質について述べる. ここでの結果は位相空間の (複素)K-理論と呼ばれる分野のものである.
4. 時間が許せば, 定理 1 の証明を行う.

本講演の内容は, 主に [2] の解説にあたる. 位相空間の K-理論への入門的な文書として [1] や [3] などがある. 本講演の内容に近いものとして [4, chapter 24] や [6, 5.3 節] などがある. 本講演において言及することはできないが, K-理論という分野は位相幾何学の研究のみならず, 幾何学を超えて代数学や解析学 (作用素環論など) の研究にも用いられている. 近年では弦理論などの現代物理学においても注目されているようである ([5]).

* coo.chan@fuji.waseda.jp(email)

発表にあたって, 3. 以降は群の基本的な知識 (準同型定理くらい) を仮定するが, 知らない方にも雰囲気が伝わるように配慮する. また, 位相空間論の言葉を積極的に用いるが, 知らなくて困ることはない. 当日は時間の都合で多くの主張を証明することができないが, 補足の資料を配布する予定である.

参考文献

[1] M. Atiyah and R. Bott. On the periodicity theorem for complex vector bundles. *Acta mathematica*, Vol. 112, No. 1, pp. 229–247, 1964.

[2] A. Hatcher. *Vector Bundles and K Theory*. 2009. downloadable from `http://www.math.cornell.edu/~hatcher/VBKT/VBpage.html`.

[3] M. Karoubi. *K-theory: An elementary introduction*. 2006. arXiv:math/0602082.

[4] J.P. May. *A Concise Course in Algebraic Topology*. Chicago Lectures in Mathematics. The University of Chicago Press, 1999.

[5] 杉本茂樹. D-brane と K 理論 (入門). 素粒子論研究, Vol. 111, No. 1, pp. 69–90, 2005. `http://ci.nii.ac.jp/naid/110006415634/`.

[6] 枡田幹也. 代数的トポロジー. 講座 数学の考え方 15. 朝倉書店, 2002.