数物セミナー 春の大談話会 2015 in お茶の水

数の概念の拡張: 位相幾何学からのアプローチ

早稲田大学基幹理工学部数学科 3 年 杉ノ内 萌 *

2015 年 5 月 23 日

Abstract

20 世紀中盤, 多くのトポロジストが "可除代数の存在問題" と関連する "Hopf 不変量が 1 であるような写像" についての研究を行った. この研究に関する大きな問題は 1960 年に J.Adams によって解決された ([1]) が, 後の Atiyah らによる K-理論の発展に伴って, より簡単な証明が知られるようになった ([2]). 本発表では, この K-理論的な証明の解説を行う.

Contents

組版は $\mathcal{A}_\mathcal{M}\mathcal{S}$-LaTeX 2_ε を用い, 図版や図式は TikZ で書きました. この文書は次からダウンロードすることができます: http://mone.at-ninja.jp.

謝辞

発表機会に加えて, 発表準備に関しても熱心に支援してくださった数物セミナー運営委員会の皆様に感謝します. また, 本発表は 3 月から 4 月にかけて行ったセミナーが元になっていますが, その際には早稲田大学の Guest 先生の研究室の皆様に大変お世話になりました. この場を借りて深く感謝します.

* coo.chan@fuji.waseda.jp(email)

Notations

- I と書いたら閉区間 $[0,1]$ を表すものとし, ∂I は離散集合 $\{0,1\}$ を表すこととする.
- 0 は自然数と考える.
- 単に近傍と言ったら開近傍を指す.
- 一点からなる位相空間を pt で表す.
- 集合 X の恒等写像を 1_X で表す.
- 集合 X とその部分集合 A に対して, 包含写像を $\mathrm{incl}: A \to X$ で表す. また, 射影を pr で表す. たとえば, $\mathrm{pr}_2 : X \times Y \to Y$ は第 2 成分の射影 $(x,y) \mapsto y$ のことである.

1 Introduction

人類は数の概念を長い歴史の中で徐々に拡張してきた. これについて少し振り返りたい.

ものを数える際に自然と現れる自然数の概念から始まり, 整数と有理数を考えた. 定式化は容易ではなかったが, 解析学などの要請から, 実数というものも構成した. 代数方程式を解くという観点から複素数というものも考えられた. これ以上知らないという方もいらっしゃるかもしれないが, 物理学を学んでいる方はスピノールという概念の記述に Hamilton の四元数を使ったことだろう. マイナーなものとして, Cayley の八元数というものも知られている.

さて, 有理数までは (自然数の体系を認めれば) 容易に構成できることから, 実数以降の数の概念について考えよう. 実数全体を $\mathbb{R}$, 複素数全体を $\mathbb{C}$, 四元数全体を $\mathbb{H}$, 八元数全体を $\mathbb{O}$ で表すことにする. これらの元はそれぞれ, $1,2,4,8$ 個の実数で表されることから, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$, $\mathbb{O}$ はそれぞれ $1,2,4,8$ 次元の実ベクトル空間である. これ以外の “数の体系” は聞かないが, 実は, 本講演において次が証明される:

$1,2,4,8$ 次元以外の “数の体系” は存在しない.

本講演の目的は, この定理の位相幾何学による証明の概略を解説することである. この節ではまず, 今考えたい問題の定式化を行う.

1.1 可除代数の存在問題

始めに, “数の体系” という曖昧な言葉を定義し直すことから始めよう. 高等学校で習ったように, 複素数体 $\mathbb{C}$ は $\mathbb{R}^2$ に “かけ算” が上手く定義されたものと考えることができる. この考え方を一般化して, 可除代数なるものを定義する.

Definition 1.1 (可除代数)
$\mathbb{R}^n$ が可除代数 (division algebra) であるとは, $\mathbb{R}^n$ にかけ算が定義されて, $\mathbb{R}^n$ の元 x, y をかけ算した結果を xy と書くとき, 次が成り立つことと定義する.

1. 分配法則: $x(\alpha y + \beta z) = \alpha xy + \beta xz, (\alpha x + \beta y)z = \alpha xz + \beta yz$ が成り立ち[*1] ,

[*1] これはすなわち, 積 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ が双線形写像であるということを主張していることに注意されたい.

2. 割り算が出来る, すなわち, 任意の 0 でない元 $a \in \mathbb{R}^n$ と任意の元 $b \in \mathbb{R}^n$ に対して, 方程式
$$ax = b, \quad xa = b$$
が $\mathbb{R}^n$ において一意的な解を持つ.

Example 1.2 ($\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$)
$\mathbb{R}$ と $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ は通常の積により可除代数をなす. また, $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$ なる i, j, k と 4 つの実数 x, y, z, w を用いて $x + yi + zj + wk$ と表される数の集まり $\mathbb{R}^4 = \mathbb{H}$ は可除代数である. 一般に以上のような "(斜) 体" と呼ばれる構造を持つ有限次元実ベクトル空間は可除代数である.

Example 1.3 ($\mathbb{O}$)
四元数の対 (a, b) と (c, d) に対して
$$(a, b)(c, d) := (ac - b\bar{d}, ad + b\bar{c})$$
という積を考えると, $\mathbb{H} \times \mathbb{H} = \mathbb{R}^8$ に可除代数の構造が入る. 実質的に 8 個の実数で表されるようなこの "数" を八元数といい, その全体を $\mathbb{O}$ で表す. 八元数の積は結合律を満たさないため, $\mathbb{O}$ は斜体とはならない. このことから, 可除代数は斜体より少し広い概念であることが分かる.

可除代数という言葉を用いれば, 本発表における目標は次のように述べられる.

$\mathbb{R}^n$ が可除代数であるための必要十分条件は n が $1, 2, 4, 8$ であることである.

$n = 1, 2, 4, 8$ であるとき, 上で見たようにたしかに $\mathbb{R}^n$ は可除代数の構造を持つので, 実際には次が示せれば良い.

$\mathbb{R}^n$ が可除代数の構造を持つならば, n は $1, 2, 4, 8$ である.

目標が定まったので, この問題がどのように幾何学と関係するのかを見よう. その前に, 技術的な補題を 1 つだけ述べておく.

Lemma 1.4
$\mathbb{R}^n$ が可除代数であるとき, 積を修正して単位元を持つように出来る.

Proof)
単位ベクトル $e \in \mathbb{R}^n$ を 1 つ固定する. 可除代数の定義から, e^2 を e に写すような線形写像 $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ が存在する. この写像を, 積をとる写像 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ に合成させることにより, $e^2 = e$ とみなす. このとき, 線形同型写像
$$\alpha : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, x \mapsto xe,$$
$$\beta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, x \mapsto ex$$
を考えると, 新しい積が
$$x \cdot y := \alpha^{-1}(x)\beta^{-1}(y)$$
によって定まり, これについて $\mathbb{R}^n$ は可除代数となる. さらに,
$$x \cdot e = \alpha^{-1}(x)\beta^{-1}(e) = \alpha^{-1}(x)e = x = e\beta^{-1}(x) = \alpha^{-1}(e)\beta^{-1}(x) = e \cdot x$$
が成り立つので, e は新しい積に関する単位元となっている. □

1.2 幾何学との関わり

さて, 唐突であるが, 次のような問題を考えよう.

Problem 1.5
n 次元球面 S^n の上に, n 個のベクトル場の組 $\{X_1, \dots, X_n\}$ であって, 各点 $p \in S^n$ において $\{X_1(p), \dots, X_n(p)\}$ が接空間 T_pS^n の基底となっているものは存在するか? これが成り立つとき, S^n は平行化可能 (parallelizable) であるという.

念の為に言葉の説明をする. n 次元球面 S^n とは, 次で定義される図形のことである:

$$S^n := \{(x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_0^2 + \cdots + x_n^2 = 1\}.$$

たとえば, 1 次元球面 S^1 は円周であり, 2 次元球面 S^2 は球面である. 次に, 球面 S^n の点 p における接空間 T_pS^n とは, 次で定義される n 次元ベクトル空間のことである:

$$T_pS^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x \text{ は } p \text{ を始点とするベクトルであり, } x \text{ と } p \text{ は直行する.}\}.$$

接空間の元であるようなベクトルのことを接ベクトルと呼ぶ. たとえば, 円周 S^1 の接空間とは接線のことであり, 球面 S^2 の接空間とは接平面のことである. 最後に, 球面 S^n 上のベクトル場 X とは, 球面の各点 $p \in S^n$ に対して, 接ベクトル $X(p) = (X^1(p), \dots, X^n(p))$ を返すようなものである. たとえば, 球面 S^2 上のベクトル場とは, 地球上の風を表す天気図のようなものである.

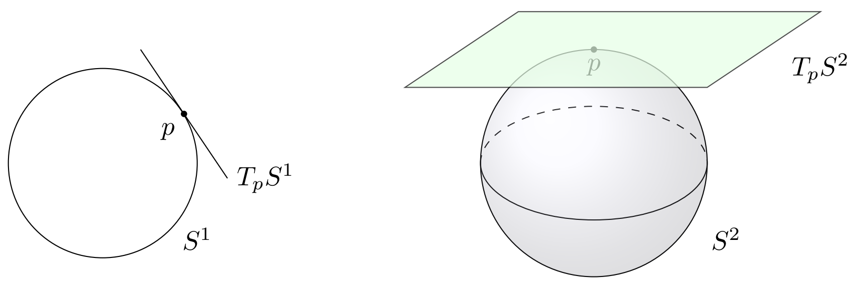

Figure.1 S^1 と S^2

さて, 問題に戻ろう. 一般に, 存在問題というものは難しいので, 具体的な例で確かめてみよう.

Example 1.6 ($n = 1$)
円周上のベクトル場として Figure.2 のようなものを考えれば良い.

Example 1.7 ($n = 2$)
この場合は不成立である. なぜならば, 球面上のベクトル場は必ず零点 (0 ベクトルとなる点) を持つからである[*2].

Example 1.8 ($n = 3$)
S^1 を複素数平面 $\mathbb{C}$ 上で長さ 1 の複素数全体とみなせば, $n = 1$ のときのベクトル場は $z \in S^1$ に対して iz を返す写像だと言える (i は虚数単位である.). この真似をすれば, S^3 は長さ 1 の 4 元数全体であり, S^7 は長さ 1 の 8 元数全体であるから, $n = 3, 7$ のときは成立する.

[*2] この結果は Poincaré-Hopf の定理の系として知られている. 詳しく知りたい方は [7] などを見られたい.

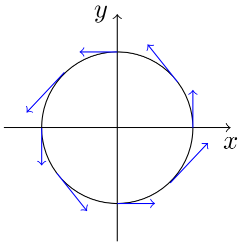

Figure.2

以上の考察により, 次が予想される.

Conjecture 1.9
$\mathbb{R}^n$ が可除代数の構造を持つならば, S^{n-1} について Problem 1.5 が成り立つ.

我々の目標は $\mathbb{R}^n$ が可除代数の構造を持つと仮定して $n = 1, 2, 4, 8$ を導くことであったから, もし上の予想が正しければ, 我々の取り組むべき問題は完全に幾何学の問題へと帰着する. そのことについて考える前に, Problem 1.5 を, より幾何学的な言葉を用いて簡潔に述べるための準備をしたい.

2　ベクトル束

ベクトル束という言葉を用いて Problem 1.5 をより簡潔に述べる. また, 後の議論のための準備としていくらかの考察を行う.

2.1　ベクトル束とは何か

ベクトル束とは, パラメータのついたベクトル空間を束ねたものである. だが, それだけだとよく分からないので, パラメータが位相空間 X を動き回るに従って, ベクトル空間の変化の仕方に制約をかける.

Definition 2.1 (ベクトル束)
E と X を位相空間とし, $p : E \to X$ をその間の連続写像とする. このとき, 自然数 n に対して, $p : E \to X$ が階数 n のベクトル束 (vector bundle of rank n) であるとは, 次の条件が成り立つことを言う.

1. 各点 $x \in X$ に対して, $p^{-1}(x)$ は n 次元実ベクトル空間である.
2. 次の局所自明性 (local triviality) と呼ばれる性質が成り立つ: X の開被覆 $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ と, 自明化写像と呼ばれる同相写像の族 $\{h_\alpha : p^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times \mathbb{R}^n\}_{\alpha \in A}$ が存在して,

$$\begin{tikzcd} p^{-1}(U_\alpha) \arrow[rr, "h_\alpha"] \arrow[dr, "p"'] & & U_\alpha \times \mathbb{R}^n \arrow[dl, "\mathrm{pr}_1"] \\ & U_\alpha & \end{tikzcd}$$

が可換であり, U_α 上の各点 x に対して, h_α の $p^{-1}(x)$ への制限はベクトル空間の同型

$$h_\alpha|_{p^{-1}(x)} : p^{-1}(x) \to \{x\} \times \mathbb{R}^n$$

を引き起こす.

ベクトル束 $p : E \to X$ に対して E を全空間 (total space), X を底空間 (base space), p を射影 (projection), $E|_x := p^{-1}(x)$ を x におけるファイバー (fibre) という．X の部分空間 A に対して, $E|_A := p^{-1}(A)$ を E の A への制限という (これは A 上のベクトル束となる.)．また, 上の "実" をすべて "複素" に変えたものを複素ベクトル束 (complex vector bundle) という．階数 1 のベクトル束を直線束 (line bundle) という．

分かりにくい定義ではあるが, 意外と身近な図形 (ないしは空間) であることを実感していただくために, いくらか例を述べたい．

Example 2.2 (Möbius 束)
Möbius の帯は, 円周の各点の上に $\mathbb{R}$ を並べて一回捻って繋げた図形だと思えるので, これは円周 S^1 上の直線束である．

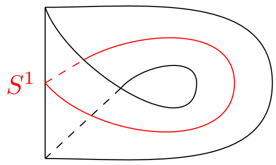

Figure.3　Möbius 束

Example 2.3 (自明束)
今度は捻らないで繋げれば, 縦に広がった円柱 $S^1 \times \mathbb{R}$ ができる．これも円周 S^1 上の直線束である．このように, 空間 X に $\mathbb{R}^n$ を直積してできるベクトル束 $X \times \mathbb{R}^n \to X$ を自明束 (trivial bundle) という．

Example 2.4 (自然直線束)
n 次元複素射影空間とは, $n+1$ 個の複素数の比[*3] がなす空間

$$\mathbb{C}P^n = \{[z_0 : \cdots : z_n] \mid z_0, \ldots, z_n \in \mathbb{C},\ (z_0, \ldots, z_n) \neq (0, \ldots, 0)\}$$

のことである．$\mathbb{C}P^1$ は球面 S^2 である．なぜならば, $\mathbb{C}P^1$ とは 2 つの複素数の比 $[z_0 : z_1]$ 全体であるが, $z_0 = 0$ のときは $[0 : z_1]$ は z_1 がどんな (0 でない) 複素数であっても $[0 : 1]$ に等しいので, これは 1 点を表し, $z_0 \neq 0$ のときは $[z_0 : z_1] = [1 : z_1/z_0]$ となるため, このような比の全体は複素数全体 $\mathbb{C}$ に等しいことから, $\mathbb{C}P^1$ は, 複素数平面 $\mathbb{C}$ に 1 点を付け加えた図形であり, これは球面 S^2 である[*4].

さて, $\mathbb{C}P^n$ は $\mathbb{C}^{n+1}$ における直線 (複素 1 次元部分空間) 全体だと思えば,

$$\eta := \{(l, v) \in \mathbb{C}P^n \times \mathbb{C}^{n+1} \mid v \in l\}$$

なるものが考えられる．これは $\mathbb{C}P^n$ の上の複素直線束であり, 自然直線束 (canonical line bundle) と呼ばれる．

[*3] ただし, 比として $[0 : \cdots : 0]$ なるものは考えないこととする．
[*4] より正確には, 1 点コンパクト化であり, これは球面に同相であるのだが, 位相の議論はここでは避ける．難しいことではないので, 気になる方は各自で考えられたい．

Example 2.5 (接束)
X を n 次元可微分多様体 (微分積分をするのに申し分ない図形[*5]) とする. このとき, 各点 $x \in X$ に接空間と呼ばれる n 次元実ベクトル空間 T_xX が定まるが, これを点 x について束ねたもの

$$TX := \bigcup_{x \in X} T_xX$$

は X 上の階数 n のベクトル束となる. これを接束 (tangent bundle) という.

後に述べるように, 接束は接ベクトル場の住処であり, 一般に "場" と呼ばれるものはベクトル束に住んでいると考えられる. この観点からも, ベクトル束という空間を研究することは, 意味のあることである.

Definition 2.6 (ベクトル束の準同型写像)
X 上の 2 つのベクトル束 $p_1 : E_1 \to X$ と $p_2 : E_2 \to X$ について, 連続写像 $\varphi : E_1 \to E_2$ が準同型写像であるとは,

$$\begin{tikzcd} E_1 \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "p_1"'] & & E_2 \arrow[dl, "p_2"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

が可換であり, 各ファイバーへの制限

$$\varphi|_{p_1^{-1}(x)} : p_1^{-1}(x) \to p_2^{-1}(x)$$

が線形写像であることをいう. とくに φ が同相写像であるときは同型写像であると言い, このとき $E_1 \simeq_X E_2$, または単に $E_1 \simeq E_2$ と表す. 自明束と同型なベクトル束を自明なベクトル束という.

位相空間 X 上の階数 n のベクトル束の同型類を $\mathrm{Vect}^n(X)$ で表し, $\mathrm{Vect}(X) := \cup_{n \geq 0} \mathrm{Vect}^n(X)$ と書くことにする.

さて, 本来の目的であった Problem 1.5 の言い換えを考えよう.

Definition 2.7 (切断)
ベクトル束 $p : E \to X$ に対して, 連続写像 $s : X \to E$ であって, $p \circ s = 1_X$ を満たすものをベクトル束 $p : E \to X$ の切断 (section) という. とくに, X の開集合 U 上で定義される連続写像 $s : U \to E$ であって, $p \circ s = 1_U$ を満たすものを E の U 上の切断, または局所切断 (local section) という. 切断 $s : X \to E$ を局所切断と区別するときは, 大域切断 (global section) という.

Example 2.8
接束の切断はベクトル場である. 先ほどの "住処" というのは, このことを指している.

次に述べるように, ベクトル束の自明性は切断の言葉で述べることが出来る.

Lemma 2.9
$p : E \to X$ を, 階数 n のベクトル束の定義から局所自明性以外を満たすものとする. このとき, $p : E \to X$ が開集合 U 上で局所自明性をもつための必要十分条件は, U 上の切断の組 $(e_1, \ldots, e_n)$ であって, $\{e_1(x), \ldots, e_n(x)\}$ が U 上の各点 x のファイバー $E|_x$ の基底となるものが取れることである. このような切断の組 $(e_1, \ldots, e_n)$ を局所枠 (local frame) という.

[*5] よくわからない方は球面だと思えば良い.

Corollary 2.10
ベクトル束 $p: E \to X$ が自明であるための必要十分条件は大域的な枠が取れることである. すなわち, 大域切断の組 $(e_1, \ldots, e_n)$ であって, 各点 $x \in X$ で $\{e_1(x), \ldots, e_n(x)\}$ がファイバー $E|_x$ の基底となるものが取れることである.

球面 S^n 上の接束 TS^n の大域的な枠とは, Problem 1.5 で問題にしていたベクトル場の組に他ならない. よって, 我々は次の自然な疑問が思い浮かぶ.

TS^n は, どのようなときに自明か？

この問題については後の節で考えることにして, 次の小節 2 つでは, 後に必要となる技術的な準備を行う.

2.2　種々の操作

ベクトル空間に対して, 直和やテンソル積などと言った操作を行ったが, ベクトル束に対しても同様の操作が出来る. このように, ベクトル束があると, そのベクトル束から新しいベクトル束を作り出すことが出来る. ここでは, そのことについて簡単に言及しておく[*6].

X 上のベクトル束 $p_1 : E_1 \to X$ と $p_2 : E_2 \to X$ に対し, それらの直和[*7] $E_1 \oplus E_2 \to X$, テンソル積 $E_1 \otimes E_2 \to X$, 外積 $\Lambda^q(E_1) \to X$ と呼ばれるベクトル束が

$$\begin{aligned} E_1 \oplus E_2 &:= \bigcup_{x \in X} E_1|_x \oplus E_2|_x, \\ E_1 \otimes E_2 &:= \bigcup_{x \in X} E_1|_x \otimes E_2|_x, \\ \Lambda^q(E_1) &:= \bigcup_{x \in X} \Lambda^q(E_1|_x) \end{aligned}$$

によって定まる.

また, 位相空間 X と Y の間に連続写像 $f: X \to Y$ があるとき, Y 上のベクトル束 $p: E \to Y$ から X 上のベクトル束 $f^*E \to X$ を

$$f^*E := \{(x, v) \in X \times E \mid f(x) = p(v)\}$$

によって作ることが出来る. このベクトル束をベクトル束 $E \to Y$ の f による引き戻し (pull back) という. 引き戻しを考えると, 各ファイバーへの制限が線形写像であるような連続写像 $\tilde{f} : f^*E \to E$ が一意的に定まって,

$$\begin{tikzcd} f^*E \arrow[r, dashed, "\tilde{f}"] \arrow[d] & E \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd}$$

が可換となるが, f^*E はこの性質についての普遍性を持つ.

Lemma 2.11 (関手性)
ベクトル束 $E_1 \to Y$, $E_2 \to Y$, $E \to Z$ と連続写像 $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$ に対し, 次が成り立つ:

[*6] 詳細が気になる方は, たとえば [5] の 1 章などを見よ.
[*7] Whitney 和とも呼ばれる.

1. $f^*(E_1 \oplus E_2) \simeq f^*E_1 \oplus f^*E_2$.
2. $f^*(E_1 \otimes E_2) \simeq f^*E_1 \otimes f^*E_2$.
3. $f^*g^*E \simeq (g \circ f)^*E$.
4. $1_Z^*E \simeq E$.

次から述べる内容は大変重要な性質であるが, 丁寧に述べると長いので簡単に説明する. 分からない方は飛ばしても差し支えない.

Lemma 2.12 (ホモトピー不変性)
$p: E \to Y$ をベクトル束とし, X をパラコンパクト位相空間とする. このとき, 連続写像 $f_1, f_2 : X \to Y$ がホモトピックならば, f_1^*E と f_2^*E は同型となる.

Proof)
$h : X \times I \to Y$ を f_0 を f_1 につなぐホモトピーとすると, f_0^*E と f_1^*E はそれぞれ, h^*E の $X \times \{0\}$ または $X \times \{1\}$ への制限となる. ゆえに次の命題が示されれば十分である. □

Proposition 2.13
X がパラコンパクトな位相空間であるとき, ベクトル束 $p : E \to X \times I$ の $X \times \{0\}$ への制限と $X \times \{1\}$ への制限は同型となる.

sketch of the proof)
まず, 2 つの補題を用意する.

Claim 1
位相空間 X に対して, ベクトル束 $E \to X \times I$ を考える. このとき, ある定数 $\alpha \in I$ が存在して, $E|_{X\times[0,\alpha]}$ と $E|_{X\times[\alpha,1]}$ が自明であるとき, E は自明である.

sketch of the proof)
これは, 自明化写像 $\varphi_1 : E|_{X\times[0,\alpha]} \to X \times [0, \alpha] \times \mathbb{R}^n$, $\varphi_2 : E|_{X\times[\alpha,1]} \to X \times [\alpha, 1] \times \mathbb{R}^n$ を $E|_{X\times\{\alpha\}}$ においてうまく貼り合わすことによって証明できる. □

Claim 2
位相空間 X に対し, ベクトル束 $E \to X \times I$ を考える. このとき, X のある開被覆 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ が存在して, 制限 $E|_{U_\alpha\times I}$ が自明であるようなものが存在する.

sketch of the proof)
ベクトル束の局所自明性から E は $X \times I$ のある小さい開集合の上で自明であるが, この自明性は, Claim 1 より I 方向に伸びるので, この主張は明らかに従う. □

Proposition 2.13 の証明の概略を述べる. Claim 2 のような開被覆を取ってくる. このとき, $E|_{U_\alpha\times I}$ は自明であるので, 自然な同型写像 $\psi_\alpha : E|_{U_\alpha\times\{0\}} \to E|_{U_\alpha\times\{1\}}$ が得られる. この同型写像の族 $\{\psi_\alpha\}_{\alpha\in A}$ を, 開被覆 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ に従属した 1 の分割を用いて貼り合わせることにより, 求める同型写像を得る. □

ホモトピー不変であるという性質は位相幾何学において大変重要な性質である. とくに, 次の一見非自明な定理を得る.

Corollary 2.14
可縮な空間の上のベクトル束は自明である.

また, 以上の議論はファイバー束というより一般の概念においても成り立つことを言及しておく.

2.3 Clutching Functions

球面上の階数 r のベクトル束 $E \to S^n$ について, 球面 S^n は 2 つの円板

$$D^n_+ := \{(x_0, \dots, x_n) \in S^n \mid x_n \geq 0\}, \quad D^n_- := \{(x_0, \dots, x_n) \in S^n \mid x_n \leq 0\}$$

を用いて $S^n = D^n_+ \cup D^n_-$ として表されるが, 円板は可縮であることから制限 $E|_{D^n_+}$ と $E|_{D^n_-}$ は共に自明である. ゆえに, ベクトル束 E は $D^n_+ \cap D^n_- = S^{n-1}$ における張り合わせの情報のみによって決まる. このことを正確に述べよう.

$$\psi_1 : E|_{D^n_+} \to D^n_+ \times \mathbb{R}^r, \quad \psi_2 : E|_{D^n_-} \to D^n_- \times \mathbb{R}^r$$

をそれぞれ自明化写像とするとき, 球面上の点でパラメータ付けられた第 2 成分に関する線形同型写像

$$\psi_2 \circ \psi_1^{-1} : (D^n_+ \cap D^n_-) \times \mathbb{R}^r \to (D^n_+ \cap D^n_-) \times \mathbb{R}^r, \quad (x, v) \mapsto (x, g(x)v)$$

を得る. これによって, 連続写像 $g : S^{n-1} \to GL_r\mathbb{R}$ が定まる. 一般に, 連続写像 $f : S^{n-1} \to GL_r\mathbb{R}$ に対して

$$E_f := (D^n_+ \times \mathbb{R}^r) \cup (D^n_- \times \mathbb{R}^r)/(x, v) \sim (x, f(x)v) \qquad (x \in D^n_+ \cap D^n_-,\ v \in \mathbb{R}^r)$$

によって定まる X 上のベクトル束を考えると, $E \simeq_X E_g$ である. このことから, 球面 S^n 上の階数 r のベクトル束は連続写像 $S^{n-1} \to GL_r\mathbb{R}$ によって分類されることになる. このような連続写像のことを clutching function という. 同様にして, 球面 S^n 上の階数 r の複素ベクトル束は clutching functions $S^{n-1} \to GL_r\mathbb{C}$ によって分類される.

Proposition 2.15
clutching function による分類についてもホモトピー不変性がある. すなわち, 連続写像 $f_1, f_2 : S^{n-1} \to GL_r\mathbb{R}$ がホモトピックならば E_{f_1} と E_{f_2} は同型である.

Proof)
$h : S^{n-1} \times I \to GL_r\mathbb{R}$ を, f_1 を f_2 につなぐホモトピーとする. このとき, clutching function による構成と全く同様にしてベクトル束 $E_h \to S^n \times I$ を作ることが出来る. このとき, E_{f_1} は E_h の $S^n \times \{0\}$ への制限であり, E_{f_2} は E_h の $S^n \times \{1\}$ への制限であるから, Proposition 2.13 より, これらは同型である. □

Example 2.16 (自然直線束)
自然直線束 $\eta \to \mathbb{C}P^1 = S^2$ に対応する clutching function を求めてみよう. 射影直線 $\mathbb{C}P^1$ を複素平面 $\mathbb{C}$ の一点コンパクト化 $\mathbb{C} \cup \{\infty\} = S^2$ とみなすことにより (このとき, $\mathbb{C}P^1$ 上の点 $[z_0 : z_1]$ は $z := z_0/z_1 \in \mathbb{C} \cup \{\infty\} = S^2$ に対応する.), S^2 を 2 つの円板

$$D^2_0 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}, \quad D^2_\infty := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \geq 1\} \cup \{\infty\}$$

の和 $S^2 = D^2_0 \cup D^2_\infty$ に分けることが出来る. このとき, D^2_0, D^2_∞ 上の点はそれぞれ $[z_0/z_1 : 1] = [z : 1]$, $[1 : z_1/z_0] = [1 : z^{-1}]$ と表されるので, これらの円板の上における η の自明化は, それぞれ

$$[z : 1] \mapsto ([z : 1], (z, 1))$$
$$[1 : z^{-1}] \mapsto ([1 : z^{-1}], (1, z^{-1}))$$

によって与えられる．このことから, $\eta \to S^2$ の clutching function は

$$S^1 = D_0^2 \cap D_\infty^2 \to GL_1\mathbb{C}, \quad z \mapsto z$$

であることが分かる．

Corollary 2.17
自然直線束 $\eta \to \mathbb{C}P^1 = S^2$ に対して

$$(\eta \otimes \eta) \oplus (S^2 \times \mathbb{C}) \simeq \eta \oplus \eta$$

が成り立つ．

Proof)
両辺の clutching functions はそれぞれ,

$$\text{左辺} = \begin{pmatrix} z^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{右辺} = \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix}$$

となっているが, $R(\theta)$ によって角度 θ の 2 次の回転行列を表すとき, これらをつなぐホモトピーが

$$R(\theta) \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} R(\theta)^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix} \qquad (0 \leq \theta \leq \pi/2)$$

によって与えられる． □

さて, Proposition 2.15 により, clutching function のホモトピー類からベクトル束の同型類を対応させる写像

$$\Phi : [S^{n-1}, GL_r\mathbb{R}] \to \mathrm{Vect}^r(S^n), \quad [f] \mapsto [E_f]$$

は well-defined である．同様に, 複素ベクトル束についても

$$\Phi_\mathbb{C} : [S^{n-1}, GL_r\mathbb{C}] \to \mathrm{Vect}^r_\mathbb{C}(S^n), \quad [f] \mapsto [E_f]$$

を得る．このとき,

Theorem 2.18
$\Phi_\mathbb{C} : [S^{n-1}, GL_r\mathbb{C}] \to \mathrm{Vect}^r_\mathbb{C}(S^n)$ は全単射である．

Proof)
逆写像 $\Psi_\mathbb{C} : \mathrm{Vect}^r_\mathbb{C}(S^n) \to [S^{n-1}, GL_r\mathbb{C}]$ を構成することにより示す．階数 r の複素ベクトル束 $p : E \to S^n = D^n_+ \cup D^n_-$ に対して, $h_\pm : E|_{D^n_\pm} \to D^n_\pm \times \mathbb{C}^r$ を自明化写像とする．このとき, $h_+ \circ h_-^{-1}$ は連続写像 $f : S^{n-1} \to GL_r\mathbb{C}$ を定める．この連続写像のホモトピー類を $\Psi_\mathbb{C}([E])$ とおく．この $\Psi_\mathbb{C}([E])$ がもし well-defined であれば, $\Psi_\mathbb{C}$ は $\Phi_\mathbb{C}$ の逆写像であることは明らかであるので, well-definedness のみ示せば良い．この well-definedness はとくに, 自明化写像 $h_\pm$ の取り方によって連続写像 $f : S^{n-1} \to GL_r\mathbb{C}$ のホモトピー類が変わらないことを示せば良いが, 自明化写像 $h_\pm$ の取り方による (行列の積としての) 差は連続写像 $F : D^n_\pm \to GL_r\mathbb{C}$ であり, $D^n_\pm$ が可縮であることと $GL_r\mathbb{C}$ が弧状連結であることから F は単位行列への恒等写像とホモトピックであることから, $f : S^{n-1} \to GL_r\mathbb{C}$ のホモトピー類は変わらない．ゆえに well-defined である． □

Corollary 2.19
S^1 上の複素直線束はすべて自明である.

Proof)
$\mathrm{Vect}^1_{\mathbb{C}}(S^1)$ は $[S^0, GL_1\mathbb{C}]$ と 1 対 1 対応するが, これは単元集合である. □

Corollary 2.20
球面 S^2 上の複素ベクトル束は, 自明な直線束 ε^1 と自然直線束 η の直和とテンソル積で表される.

Proof)
$\mathrm{Vect}^n_{\mathbb{C}}(S^2)$ は $[S^1, GL_n\mathbb{C}] = \pi_1(GL_n\mathbb{C}) = \pi_1(U(n))$ と 1 対 1 対応するが, 正の整数 n に対して $\pi_1(U(n))$ は $\mathbb{Z}$ と同型であり, 生成元は

$$z \mapsto \begin{pmatrix} z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

であることが知られていることから従う. □

Remark 2.21
Theorem 2.18 の証明は $GL_r\mathbb{C}$ の連結性を本質的に用いているため, $GL_r\mathbb{R}$ の場合に適用できない. 実際, 実ベクトル束を clutching function で分類する際にはベクトル束の向き付けも考慮する必要がある. 気になる方は [5] の 1.2 節を見られたい.

このように, 実ベクトル束よりも複素ベクトル束の方が扱いやすいことが多いため, 以降では複素ベクトル束の議論に集中する.

3　複素 K-理論入門

n 次元球面 S^n の接束 TS^n がどのようなときに自明であるかという議論に戻ろう. $n = 2$ のときは自明でないということを既に我々は証明したが, $n = 1, 3, 7$ では自明であったことから, 接束はそんなにも自明束から離れた存在であるのだろうかという疑問を持つ. 実際に, 点 $x \in S^n$ における法線 $N_xS^n := \{p \in \mathbb{R}^{n+1} \mid p$ と x は平行 $\}$ を $x \in S^n$ について束ねることによって得られる法束 (normal bundle)

$$NS^n := \bigcup_{x \in S^n} N_xS^n$$

という自明な直線束*8 を接束に直和させれば, これは $\mathbb{R}^{n+1}$ の接束 TR^{n+1} の制限であるから, 自明束である:

$$TS^n \oplus NS^n \simeq S^n \times \mathbb{R}^{n+1}.$$

法束が自明であることと, 自明束 $S^n \times \mathbb{R}^{n+1}$ は自明束の和 $S^n \times \mathbb{R}^n \oplus S^n \times \mathbb{R}$ で表されることから,

$$TS^n \oplus (S^n \times \mathbb{R}) \simeq (S^n \times \mathbb{R}^n) \oplus (S^n \times \mathbb{R})$$

を得る. 従って, 接束は自明束を足すと自明になるようなベクトル束であることが分かる. 自然な直感から両辺を簡約して $TS^n \simeq S^n \times \mathbb{R}^n$ を得てもいい気がするが, 先ほど見たように $n = 2$ ではこれは成り立たない.

*8 法ベクトル場が取れることから, 法束は自明である.

ゆえに, ベクトル束の直和 $\oplus$ は $\mathrm{Vect}(X)$ に可換なモノイド[*9] の構造を与えるが, これは群の演算とならないような異質な演算であり, この和に関する代数構造を調べたいと思うことは自然な欲求である. 可換なモノイドを Abel 群と比較して調べるための道具として Grothendieck 群というものがある. 本発表では, この手法を用いて $K(X)$ を定義する.

Notation 3.1
以降では, 簡単のために複素ベクトル束のみを扱う. そのため, 単にベクトル束と言ったら複素ベクトル束のことを指し, $\mathrm{Vect}(X)$ と書いたら複素ベクトル束の同型類を表すこととする. 実ベクトル束を扱う場合は, そのことについて言及する.

Remark 3.2
ベクトル束のファイバーの次元がいたるところ同じであると仮定していたが, 本来であれば, 今後はその条件を外して考えるべきである. これはコホモロジー理論との関係づけるためと考えられるが, 議論を簡単にするため, 本文書ではそのことについて気にしないことにする.

3.1 K 群の定義

ここでは, $K(X)$ の定義とその元の具体的な表示を見る.

Lemma 3.3 (Grothendieck 構成)
$(A,+)$ を可換なモノイドとする. このとき, Abel 群 $(B,+)$ とモノイドとしての準同型写像 $i:A\to B$ が存在して, 任意の Abel 群 $(G,\cdot)$ と任意のモノイドとしての準同型写像 $\varphi:A\to G$ に対して, 一意的に群の準同型写像 $\tilde{\varphi}:B\to G$ が誘導され,

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "\varphi"'] & B \arrow[d, dashed, "\tilde{\varphi}"] \\ & G \end{tikzcd}$$

が可換となる. また, $(B,+)$ と i の組はこの性質について普遍性を持つ. このような B を A の Grothendieck 群 (Grothendieck group) という. また, A から B を作ることを Grothendieck 構成 (Grothendieck construction) という.

例を考えれば, これは簡単なことである. たとえば, $A=\mathbb{N}$ であるときは $B=\mathbb{Z}$ である. 実際, i を包含写像とし, $n\in\mathbb{N}$ に対して $\tilde{\varphi}(n)=\varphi(n)$, $\tilde{\varphi}(-n)=\varphi(n)^{-1}$ と定めれば良い. よって, このような B は, 自然数から整数を構成するかのごとく作れば良い.

Proof)
対 $(x,y)\in A\times A$ を $x-y$ と書くことにして, $x-y\sim z-w$ をある $a\in A$ が存在して $x+w+a=y+z+a$ となることと定義すると, これは $A\times A$ 上の同値関係となり, それについての商 $A/\sim$ を B とおく[*10]. B 上の演算 $+$ を

$$(x-y)+(z-w):=(x+z)-(y+w)$$

*9 群の定義から逆元の存在を忘れたものをモノイドという. 群においては簡約法則 $(x+z=y+z\Rightarrow x=y)$ が成り立つが, 一般に, モノイドに対しては成り立たない.

*10 構成方法はいくらか知られているが, 普遍性から結果はすべて同型となるはずなので, ここでは特に気にしないことにする.

によって定義することができ, $(B,+)$ は求める Abel 群となる. □

Definition 3.4 ($K(X)$)
位相空間 X に対して, 複素ベクトル束の同型類 $\mathrm{Vect}(X)$ のなす可換なモノイドの Grothendieck 群を $K(X)$ と表し, X の K 群ないしは Grothendieck 群と呼ぶ.

Example 3.5
X を 1 点からなる位相空間とすると, $\mathrm{Vect}(X)$ は自然数全体 $\mathbb{N}$ の集合と 1 対 1 対応するので, $K(X)=\mathbb{Z}$ である.

以降では, この $K(X)$ の持つ性質を調べてゆく. 簡単のため, X はコンパクト Hausdorff 空間とする. この仮定は $K(X)$ の元をより具体的に表示するための仮定であり, また, 関手 $K(-)$ のホモトピー不変性を与える. 後者については, コンパクト Hausdorff 空間はパラコンパクト空間であることを考えれば, 前節で行った考察より直ちに従う. 前者についてはこれより述べる.

Lemma 3.6
コンパクト Hausdorff 空間 X 上の任意のベクトル束 $p:E\to X$ に対し, あるベクトル束 $F\to X$ が存在して, $E\oplus F$ は自明束となる.

Proof)
ベクトル束 $p:E\to X$ が, ある大きな自然数 N に対して, 自明束 $X\times\mathbb{R}^N\to X$ に埋め込めることを示す. もしこれが正しければ, $X\times\mathbb{R}^N$ 内において $E\to X$ に直行するベクトル束[*11] を $F\to X$ とおけば良い.

さて, $E\to X$ を階数 r の実ベクトル束とする[*12]. $x\in X$ とすると, ベクトル束の局所自明性から x の近傍 U_x で, $E|_{U_x}$ が自明束 $U_x\times\mathbb{R}^r$ であるようなものが存在する. Urysohn の補題から, 連続写像 $\varphi_x:X\to[0,1]$ であって

$$\begin{cases}\varphi_x=0 & \text{on } B\backslash U_x,\\ \varphi_x\neq 0 & \text{at } x\end{cases}$$

なるものが存在する. このとき, $\{\varphi_x^{-1}(0,1]\}_{x\in X}$ は X の開被覆となるが, いま X はコンパクトなのでその有限部分被覆 $\{\varphi_i^{-1}(0,1]\}_{i=1}^k$ が取れる. いま, 各 $i=1,\dots,k$ に対して, $h_i:E|_{U_i}\to U_i\times\mathbb{R}^r$ を自明化写像, $\pi_i:U_i\times\mathbb{R}^r\to\mathbb{R}^r$ を第 2 成分の射影として,

$$g_i:E\to\mathbb{R}^r,\quad v\mapsto\varphi_i(p(v))(\pi_i\circ h_i(v))$$

とおくと, これは $\varphi_i^{-1}(0,1]$ 上の各ファイバーで単射な線形写像である. ゆえに,

$$g:E\to\mathbb{R}^N:=\bigoplus_{i=1}^k\mathbb{R}^r,\quad v\mapsto\sum_{i=1}^k g_i(v)$$

は X 上の全てのファイバーにおいて単射な線形写像となっている. このとき,

$$f:E\to X\times\mathbb{R}^N,\quad v\mapsto(p(v),g(v))$$

[*11] 一般に, ベクトル束 $E\to X$ に対して, 各ファイバーにおける内積を X の動きに合わせて連続に対応させるものをベクトル束 $E\to X$ の計量 (metric) といい, これは X がパラコンパクト空間であれば取れる. いま, X はコンパクト Hausdorff 空間であるから, とくにパラコンパクトであるので, 計量を取ることができる. 次に, 定義はしていないがベクトル束の部分束 (subbundle)$E'\to X$ なるものを考えると, 各ファイバーにおいて $E'|_x$ の $E|_x$ における直交補空間 $E'^{\perp}|_x$ を束ねることにより, $E'\oplus E'^{\perp}\simeq E$ なるベクトル束 $E'^{\perp}\to X$ を得ることが出来る.

[*12] この補題は複素ベクトル束に対しても成り立つ.

は求める埋め込みとなっている． □

Notation 3.7
以降では簡単のため, 自明な複素ベクトル束 $X \times \mathbb{C}^n \to X$ を ε^n で表す．

Lemma 3.8
X をコンパクト Hausdorff 空間とする．このとき次が成り立つ．

1. $K(X)$ の元 $E_1 - F_1$ と $E_2 - F_2$ に対して, $E_1 - F_1 = E_2 - F_2$ であるための必要十分条件は, ある自然数 n が存在して $E_1 \oplus F_2 \oplus \varepsilon^n \simeq E_2 \oplus F_1 \oplus \varepsilon^n$ が成り立つことである．
2. $K(X)$ の任意の元は $E - \varepsilon^n$ という形で表される．

Proof)
1. $E_1 - F_1 = E_2 - F_2$ である定義は, あるベクトル束 $V \to X$ が存在して, $E_1 \oplus F_2 \oplus V \simeq E_2 \oplus F_1 \oplus V$ が成り立つことであった．いま, X がコンパクト Hausdorff 空間であるから, あるベクトル束 $W \to X$ と自然数 n が存在して, $V \oplus W \simeq X \times \mathbb{C}^n$ が成り立つ．ゆえに, 両辺に W を直和させることにより, $E_1 \oplus F_2 \oplus \varepsilon^n \simeq E_2 \oplus F_1 \oplus \varepsilon^n$ を得る．逆は明らかである．
2. $E - F \in K(X)$ とする．X はコンパクト Hausdorff 空間であるから, ベクトル束 $F \to X$ に対して, あるベクトル束 $V \to X$ と自然数 n が存在して, $F \oplus V \simeq \varepsilon^n$ が成り立つ．このとき,
$$E - F = (E - F) + (V - V) = (E \oplus V) - (F \oplus V) = E' - \varepsilon^n$$
となるため ($E' := E \oplus V$ とおいた), 主張は示された．

□

Definition 3.9 ($\tilde{K}(X)$)
基点 $x_0 \in X$ を 1 つ固定する．このとき, 包含写像 $i : \{x_0\} \to X$ から誘導される準同型 $i^* : K(X) \to K(\{x_0\}) = \mathbb{Z}$ の核を $\tilde{K}(X)$ と表し, X の簡約 K 群 (reduced K group) という．

Proposition 3.10
X がコンパクト Hausdorff 空間であるとき, $\mathrm{Vect}(X)$ 上の関係 $[E_1] \sim [E_2]$ を, ある自然数 n_1 と n_2 が存在して $E_1 \oplus \varepsilon^{n_1} \simeq E_2 \oplus \varepsilon^{n_2}$ が成り立つことと定義すると, これは同値関係となる．この同値関係による商 $A := \mathrm{Vect}(X)/\sim$ に対し, $\mathrm{Vect}(X)$ の元 $[E_1]$, $[E_2]$ の定める A における同値類を $[E_1]_\sim$, $[E_2]_\sim$ と表すとき,
$$+ : A \times A \to A, \quad ([E_1]_\sim, [E_2]_\sim) \mapsto [E_1]_\sim + [E_2]_\sim := [E_1 \oplus E_2]_\sim$$
は well-defined であり, これは A に Abel 群の構造を与える．このとき, $\tilde{K}(X)$ は Abel 群として A と同型である．

Proof)
まず, A が Abel 群となることから示す．A の定義は問題ない．和が well-defined であることも難しくない．この和が Abel 群の構造を定めることを示そう．結合律と可換性は, ベクトル束の直和がその性質を持つことから明らかである．単位元は $[\varepsilon^0]_\sim$ である．最後に, 元 $[E]_\sim \in A$ に対する逆元を考える．いま X はコンパクト Hausdorff であるから, あるベクトル束 $F \to X$ と自然数 n が存在して, $E \oplus F \simeq \varepsilon^n$ が成り立つ．ゆえに $[E]_\sim + [F]_\sim = [E \oplus F]_\sim = [\varepsilon^n]_\sim = [\varepsilon^0]_\sim = 0$ であるので, $[F]_\sim \in A$ は $[E]_\sim$ の逆元となっている．

次に, Abel 群 A が, Abel 群 $\tilde{K}(X)$ と同型となることを示そう．まず, $K(X)$ と A の関係を調べる．写像

$$\varphi : K(X) \to A, \quad E - \varepsilon^n \mapsto [E]_\sim$$

は, 容易に確かめられるように, well-defined な全射準同型である．従って, $A \simeq K(X)/\ker\varphi$ が成り立つ．ここで,

$$\ker\varphi = \{E - \varepsilon^n \in K(X) \mid [E]_\sim = [\varepsilon^0]_\sim\}$$

であるが, $[E]_\sim = [\varepsilon^0]_\sim$ であるということは, ある自然数 m と k が存在して, $E \oplus \varepsilon^k \simeq \varepsilon^m$ となることであるから,

$$\ker\varphi = \{\varepsilon^m - \varepsilon^n \in K(X) \mid n, m \in \mathbb{N}\}$$

となる．一方で, 基点 $x_0 \in X$ を固定して, 包含写像 $i : \{x_0\} \to X$ の誘導する準同型 $i^* : K(X) \to K(x_0) \simeq \mathbb{Z}$ を考えると, i^* は同型 $\ker\varphi \simeq \mathbb{Z}$ を与える．よって, 分裂 $K(X) \simeq A \oplus \ker\varphi$ を得る．この分裂を分裂 $K(X) \simeq \tilde{K}(X) \oplus \mathbb{Z} \simeq \tilde{K}(X) \oplus \ker\varphi$ と合わせることにより, $A \simeq \tilde{K}(X)$ を得る．□

さて, $K(X)$ の重要な性質として, ベクトル束のテンソル積から定まる積を持つことがある．

Proposition 3.11
$K(X)$ の積を

$$K(X) \times K(X) \to K(X), \quad (E_1 - E_2, E_3 - E_4) \mapsto (E_1 \otimes E_3 + E_2 \otimes E_4) - (E_1 \otimes E_4 + E_2 \otimes E_3)$$

で定めるとこれは well-defined であり, これは $K(X)$ に単位的な可換環の構造を与える．

Proof)
well-definedness の確認は routine work なので省略する．$\varepsilon^1 - \varepsilon^0$ が単位元となることは明らかである．可換性はテンソル積の可換性より従う．□

また, $\tilde{K}(X) = \ker(K(X) \to K(x_0))$ であるので, $\tilde{K}(X)$ にも (単位的かどうか分からない) 可換環の構造が入る．

3.2 対の完全列

K においても対の完全列が成り立つ．このことをとくに, $\tilde{K}$ について示す．

Proposition 3.12
コンパクト Hausdorff 空間 X とその閉部分空間 A に対して, 包含写像 $i : A \to X$ と自然な射影 $q : X \to X/A$ の誘導する環の列

$$\tilde{K}(X/A) \xrightarrow{q^*} \tilde{K}(X) \xrightarrow{i^*} \tilde{K}(A)$$

は完全列である．

Remark 3.13
一般に, コンパクト Hausdorff 空間をその閉部分空間で割った商空間はコンパクト Hausdorff となるので, $\tilde{K}(X/A)$ に対しても以上の考察を応用することが出来ることに注意されたい．

Proof)

$\operatorname{im} q^* \subset \ker i^*$ であること

図式

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\mathrm{pr}"'] & X \arrow[d, "q"] \\ A/A \arrow[r, "\mathrm{incl}"'] & X/A \end{tikzcd}$$

は可換であるので, 関手性から,

$$\begin{tikzcd} \tilde{K}(A) & \tilde{K}(X) \arrow[l, "i^*"'] \\ 0 = \tilde{K}(A/A) \arrow[u, "\mathrm{pr}^*"] & \tilde{K}(X/A) \arrow[l, "\mathrm{incl}^*"] \arrow[u, "q^*"'] \end{tikzcd}$$

は可換となり, これは $i^* \circ q^* = 0$ を表す.

$\operatorname{im} q^* \supset \ker i^*$ であること

$[E]_\sim \in \tilde{K}(X)$ が i^* の核に入っているということは, $[i^* E]_\sim = [E|_A]_\sim = [\varepsilon^n]_\sim$ であるということである. これからの議論は $\tilde{K}$ の範疇で行うため, $E|_A$ は自明であると仮定して構わない. $h : E|_A \to A \times \mathbb{C}^n$ を自明化写像とする. A 上のファイバーをすべて同一視したものを E/h とおく. より正確に述べると, $x, y \in A$, $v \in \mathbb{C}^n$ に対して, E 上で $h^{-1}(x, v)$ と $h^{-1}(y, v)$ を同一視して得た空間を E/h とおくということである. ベクトル束 $p : E \to X$ の射影 p は, 自然な射影として連続写像 $p' : E/h \to X/A$ を定める. もし $p' : E/h \to X/A$ がベクトル束であれば, 自然な射影 $pr : E \to E/h$ は各ファイバー上で線形写像であり,

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\mathrm{pr}"] \arrow[d, "p"'] & E/h \arrow[d, "p'"] \\ X \arrow[r, "q"'] & X/A \end{tikzcd}$$

が可換であるので, $E \simeq q^*(E/h)$ を得る. これは今示すべきことであった. よって, 次を示せば証明は完了する. □

Claim 3

$p' : E/h \to X/A$ はベクトル束である.

sketch of the proof)

潰した A/A の近傍における局所自明性が言えれば良い. このことは, 空間対 (X, A) が十分性質の良い空間の対であれば, 明らかである. たとえば, X がコンパクト可微分多様体で, A がその閉部分多様体であるとき, A の近傍で, ∂A とホモトピー同値なものが取れるからである. しかしながら, 一般にはこのような近傍は取れないため, A の "境界" 付近の局所自明化を Tietze の拡張定理を用いて "外に少し" 拡張し, それをうまく貼り合わせることによって, A/A 近傍における自明化を与えるといった議論をする必要がある. ここでは詳細は省略する. 気になる方は, [5] の Proposition 2.9 を見られたい. □

この完全列を応用する前に, 1 つだけ技術的な補題を用意する.

Lemma 3.14
X をコンパクト Hausdorff 空間とし, A をその閉部分空間とする. いま, A が可縮であったとする. このとき, 射影 $q : X \to X/A$ が誘導する写像

$$q^* : \mathrm{Vect}^n(X/A) \to \mathrm{Vect}^n(X)$$

は全単射である.

Proof)
写像

$$\mathrm{Vect}^n(X) \to \mathrm{Vect}^n(X/A), \quad [E] \mapsto [E/h]$$

が*13 well-defined な q^* の逆写像であることを示せばよいが, well-defined ならば逆写像であることは明らかである. well-definedness は局所自明化写像 h のとり方に依らないことを示さなければならない. 2 つの局所自明化写像 h_1, h_2 を考えた時にこれらの差は (行列の積として) 連続写像 $A \to GL_n\mathbb{C}$ として表される. しかし, いま A は可縮であるから, $GL_n\mathbb{C}$ の連結性より, このような連続写像は単位行列に値を取る定値写像にホモトピックである. well-definedness はこのことから従う. □

以上で対の完全列を導出する準備は整った. X をコンパクト Hausdorff 空間とし, A をその閉部分空間とする. X の錐 (cone) とは, 商空間 $CX := X \times I/X \times \{1\}$ のことを言うのであった. また, X の懸垂 (suspension) とは, 商空間 $SX := X \times I/X \times \partial I$ のことを言うのであった. たとえば, $X = S^1$ のときは Figure. 4 のような図形となる. このとき, SS^1 は球面 S^2 と同相であることに注意されたい*14.

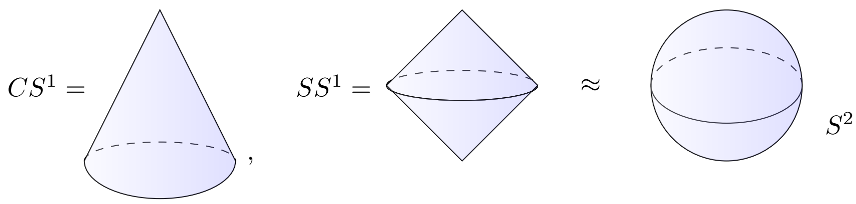

Figure.4 CS^1 と SS^1

さて, 以上の議論を可換図式

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "i_1"] & X \arrow[r, "i_2"] \arrow[dr, "p_1"] & X \cup CA \arrow[r, "i_3"] \arrow[d, "p_2"] \arrow[dr, "p_3"] & (X \cup CA) \cup CX \arrow[r, "i_4"] \arrow[d, "p_4"] \arrow[dr, "p_5"] & ((X \cup CA) \cup CX) \cup C(X \cup CA) \arrow[r, "i_5"] \arrow[d, "p_6"] \arrow[dr, "p_7"] & \cdots \\
& & X/A & SA & SX & \cdots
\end{tikzcd}$$

に適用しよう. ここで, 上段の横の列は, 1 つ前の空間に 2 つ前の空間の錘をくっつけたものと包含写像による列であり, 縦の列はくっつけたものを 1 点に潰す写像で, 斜めは 1 つ前の空間を潰す写像である.

Theorem 3.15
コンパクト Hausdorff 空間 X とその閉部分空間 A に対し, 環の完全列

$$\cdots \to \tilde{K}(SX) \to \tilde{K}(SA) \to \tilde{K}(X/A) \to \tilde{K}(X) \to \tilde{K}(A)$$

*13 ベクトル束 E/h は, 前命題の証明中で構成したものである.
*14 一般に, $n-1$ 次元球面 S^{n-1} の懸垂 SS^{n-1} は n 次元球面 S^n と同相である.

が成り立つ. これを対の完全列と呼ぶ. しばしば $\tilde{K}(X/A)$ は $\tilde{K}(X, A)$ と書かれる.

Proof)
まず, 短い列

$$A \xrightarrow{i_1} X \xrightarrow{p_1} X/A, \qquad X \xrightarrow{i_2} X \cup CA \xrightarrow{p_3} SA$$

に Proposiotion 3.12 を適用して, 環の完全列

$$\tilde{K}(A) \xleftarrow{i_1^*} \tilde{K}(X) \xleftarrow{p_1^*} \tilde{K}(X/A), \qquad \tilde{K}(X) \xleftarrow{i_2^*} \tilde{K}(X \cup CA) \xleftarrow{p_3^*} \tilde{K}(SA)$$

を得る. いま, 錘が可縮であることから, 射影 $p_2 : X \cup CA \to X/A$ は同型 $p_2^* : \tilde{K}(X/A) \to \tilde{K}(X \cup CA)$ を引き起こす. $p_2 \circ i_2 = p_1$ であるから, 関手性より $i_2^* \circ p_2^* = p_1^*$ であるので, 完全列は

$$\begin{tikzcd}
\tilde{K}(A) & \tilde{K}(X) \arrow[l, "i_1^*"'] \arrow[d, equal] & \tilde{K}(X/A) \arrow[l, "p_1^*"'] \arrow[d, "p_2^*", "\simeq"'] & \\
& \tilde{K}(X) & \tilde{K}(X \cup CA) \arrow[l, "i_2^*"] & \tilde{K}(SA) \arrow[l, "p_3^*"']
\end{tikzcd}$$

のようにつながり, 結果として

$$\tilde{K}(A) \xleftarrow{i_1^*} \tilde{K}(X) \xleftarrow{p_1^*} \tilde{K}(X/A) \xleftarrow{p_2^{*-1} \circ p_3^*} \tilde{K}(SA)$$

という完全列を得る. この調子で伸ばしてゆけば良い. □

3.3　Bott 周期性

Bott 周期性とは, Bott が発見した古典群のホモトピー群に関する周期性である ([4]). これは代数的位相幾何学における定理だが, 証明は Riemann 幾何学や多様体の微分構造を上手く用いた証明 (Morse 理論[*15]) であった. 多くのトポロジストが代数的位相幾何学の範疇でこれを示そうとしたところ, Atiyah らによる K-理論の導入によって, これはベクトル束の言葉で記述できることが発見された. ここではとくに, 複素 K-理論における周期性について述べる.

まず, 準備として, K と $\tilde{K}$ それぞれにクロス積と呼ばれる概念を導入する.

Definition 3.16 (クロス積)
コンパクト Hausdorff 空間 X, Y に対し, 環準同型

$$* : K(X) \otimes K(Y) \to K(X \times Y), \quad a \otimes b \mapsto a * b := (\mathrm{pr}_1^* a)(\mathrm{pr}_2^* b)$$

をクロス積 (cross product) と呼ぶ[*16].

[*15] 例えば, [6] を見られたい.
[*16] 通常であれば, $\times$ を用いて表すべきだが, ベクトル束に対して $E \times F$ は別の意味があるため, 区別するために $*$ を用いている. これは [5] の記法である.

clutching function の議論から, 球面 $S^2 = \mathbb{C}P^1$ 上の自然直線束を η とすれば, $\mathbb{Z}[\eta] \to K(S^2)$ という環準同型があるが, Corollary 2.17 より, この環準同型は

$$\psi : \mathbb{Z}[\eta]/(\eta-1)^2 \to K(S^2)$$

という環準同型を誘導する. これをクロス積と合成することにより, コンパクト Hausdorff 空間 X に対して, 環準同型

$$\mu : K(X) \otimes \mathbb{Z}[\eta]/(\eta-1)^2 \xrightarrow{1\otimes\psi} K(X) \otimes K(S^2) \xrightarrow{*} K(X \times S^2)$$

を考える. すると, 次が成り立つ.

Fact 3.17 (The Fundamental Product Theorem)
μ は同型である.

この事実は Bott 周期性を示すカギであり, この事実自体を Bott 周期性と呼ぶこともある. 証明はとても長いのでここでは省略するが, 証明のカギが複素解析の議論にあることは大変興味深いことである. 気になる方は, たとえば [5] の Theorem 2.2 や [3] などを見られたい.

X を一点からなる位相空間 pt とすることによって, $K(pt) \simeq \mathbb{Z}$ であったから μ は次の同型を与える.

Corollary 3.18
$K(S^2) \simeq \mathbb{Z}[\eta]/(\eta-1)^2$.

また, $x_0 \in S^2$ を 1 つ固定すると, $\tilde{K}(S^2)$ は $\mathrm{incl}^* : K(S^2) \to K(x_0)$ の核であったが,

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{Z}[\eta]/(\eta-1)^2 & \xrightarrow{\simeq} & K(S^2) & \xrightarrow{\mathrm{incl}^*} & K(x_0) & \xrightarrow{\simeq} & \mathbb{Z} \\ a+b\eta & \longmapsto & a\varepsilon^1 + b\eta - \varepsilon^n & \longmapsto & a\varepsilon^1 + b\varepsilon^1 - \varepsilon^n & \longmapsto & a+b \end{array}$$

という対応より, 次が分かる.

Corollary 3.19
$\tilde{K}(S^2)$ は Abel 群として $\eta - 1$ で生成される無限次巡回群で, $(\eta-1)^2 = 0$ となるような積を持つ.

次に, $\tilde{K}$ において Fact 3.17 に対応する定理を導出したい. そのために, $\tilde{K}$ におけるクロス積を以下で考える. X と Y をコンパクト Hausdorff 空間とし, 基点として $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$ を固定する. このとき, (X, x_0) と (Y, y_0) のウェッジ和[*17] (wedge sum) とは, (x_0, y_0) を基点にもつ $X \vee Y := X \times \{y_0\} \cup \{x_0\} \times Y$ という $X \times Y$ の部分空間であった. また, X と Y のスマッシュ積 (smash product) とは, 商空間 $X \wedge Y := X \times Y / X \vee Y$ のことであった. 空間対 $(X \times Y, X \vee Y)$ に対して対の完全列を考えると

$$\tilde{K}(S(X\times Y)) \xrightarrow{(Si)^*} \tilde{K}(S(X\vee Y)) \xrightarrow{\delta^*} \tilde{K}(X\wedge Y) \xrightarrow{j^*} \tilde{K}(X\times Y) \xrightarrow{i^*} \tilde{K}(X\vee Y)$$

という環の完全列を得る. ここで, i^* と j^* はそれぞれ, 包含写像 $i : X \vee Y \to X \times Y$ と射影 $j : X \times Y \to X \wedge Y$ から誘導される準同型である. さて, 明らかに $\tilde{K}(X \vee Y) \simeq \tilde{K}(X) \oplus \tilde{K}(Y)$ であるが, このことから

*17 wedge sum を日本語にどう訳していいか分からなかったため, 岩波数学辞典 ([8]) で調べてみたが, 同じ概念にそもそも wedge sum という言葉を用いていなかった. ここでは便宜的に "ウェッジ和" と訳してしまったが, 一般的な言い方でない可能性がある.

$\tilde{K}(S(X\vee Y))\simeq\tilde{K}(SX)\oplus\tilde{K}(SY)$ がいえる[*18]. また, 写像

$$I:\tilde{K}(X)\oplus\tilde{K}(Y)\to\tilde{K}(X\times Y),\quad (a,b)\mapsto \mathrm{pr}_1^*a+\mathrm{pr}_2^*b$$

を考えれば, $i^*\circ I$ は恒等写像となることが確かめられるから i^* は全射であることが分かり, 同様にして $(Si)^*$ も全射であると分かる. このことから, 準同型定理を繰り返し用いることにより, 環としての分裂

$$\tilde{K}(X\times Y)\simeq\tilde{K}(X\wedge Y)\oplus\tilde{K}(X)\oplus\tilde{K}(Y) \tag{$\sharp$}$$

を得る[*19].

さて, $\tilde{K}(X)=\ker(K(X)\to K(x_0))$ の元 a と $\tilde{K}(Y)=\ker(K(Y)\to K(y_0))$ の元 b に対してクロス積 $a*b=(\mathrm{pr}_1^*a)(\mathrm{pr}_2^*b)\in\tilde{K}(X\times Y)$ を考えると, これは $\tilde{K}(X)$ や $\tilde{K}(Y)$ に制限すると 0 になる. よって, 分裂 ($\sharp$) より, $a*b\in\tilde{K}(X\wedge Y)$ となる. ゆえに, 環準同型

$$*:\tilde{K}(X)\otimes\tilde{K}(Y)\to\tilde{K}(X\wedge Y),\quad a\otimes b\mapsto a*b$$

を得る. これはクロス積の制限に他ならない. 実際, $K(X)\otimes K(Y)\simeq(\tilde{K}(X)\oplus\mathbb{Z})\otimes(\tilde{K}(X)\oplus\mathbb{Z})\simeq\tilde{K}(X)\otimes\tilde{K}(Y)\oplus\tilde{K}(X)\oplus\tilde{K}(Y)\oplus\mathbb{Z}$ であることから, 図式

$$\begin{tikzcd}
K(X)\otimes K(Y) \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d, "*"] & \tilde{K}(X)\otimes\tilde{K}(Y) \arrow[d, "*"] & \oplus & \tilde{K}(X) \arrow[d, equal] & \oplus & \tilde{K}(Y) \arrow[d, equal] & \oplus & \mathbb{Z} \arrow[d, equal] \\
K(X\times Y) \arrow[r, "\simeq"] & \tilde{K}(X\wedge Y) & \oplus & \tilde{K}(X) & \oplus & \tilde{K}(Y) & \oplus & \mathbb{Z}
\end{tikzcd}$$

は可換であるが, このことはそれを意味している.

さて, 位相空間 X に対して n 回の懸垂 S^nX はスマッシュ積 $S^n\wedge X$ と同相であることに注意すると, 環準同型

$$\beta:\tilde{K}(X)\to\tilde{K}(S^2\wedge X)\simeq\tilde{K}(S^2X),\quad a\mapsto(\eta-1)*a$$

が考えられる (ここで, $\eta\to S^2=\mathbb{C}P^1$ は自然直線束である.).

Theorem 3.20 (Bott 周期性)
このとき, $\beta:\tilde{K}(X)\to\tilde{K}(S^2X)$ は環の同型である.

Proof)
$\alpha:\tilde{K}(X)\to\tilde{K}(X)\otimes\tilde{K}(S^2),\quad a\mapsto(\eta-1)\otimes a$ は, $\tilde{K}(S^2)$ の具体的な計算から同型写像であることが分かる. 定理の主張は, 図式

---

*18 正確には簡約懸垂 ΣX というものを考える必要がある. 点付き空間 (X,x_0) に対して, $SX=X\times I/X\times\partial I$ であったが, ΣX は $X\times I/X\times\partial I\cup\{x_0\}\times I$ で定義される商空間である. ΣX は x_0 を基点に持つものとする. $\{x_0\}\times I$ は可縮であるから, K を考える上では SX と ΣX に差はないため, (本当は良くないが, 議論を簡単にするために) 以降の議論でもこれらの違いを明記しないことにする.

*19 実際, $\tilde{K}(X\vee Y)\simeq\tilde{K}(X\times Y)/\ker i^*\simeq\tilde{K}(X\times Y)/\operatorname{im}j^*$ であるが, $\operatorname{im}j^*\simeq\tilde{K}(X\wedge Y)/\ker j^*\simeq\tilde{K}(X\wedge Y)/\operatorname{im}\delta^*$ であり, $(Si)^*$ が全射であることから $\operatorname{im}\delta^*\simeq(\tilde{K}(SX)\oplus\tilde{K}(SY))/\ker\delta^*\simeq(\tilde{K}(SX)\oplus\tilde{K}(SY))/\operatorname{im}(Si)^*\simeq 0$ と計算される.

$$
\begin{tikzcd}
 & \tilde{K}(X) \arrow[d, "\alpha", "\simeq"'] \arrow[dd, bend left=60, "\beta"] & & & & & & \\
K(X) \otimes K(S^2) \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d, "*", "\simeq"'] & \tilde{K}(X) \otimes \tilde{K}(S^2) \arrow[d, "*"] & \oplus & \tilde{K}(X) \arrow[d, equal] & \oplus & \tilde{K}(S^2) \arrow[d, equal] & \oplus & \mathbb{Z} \arrow[d, equal] \\
K(X \times S^2) \arrow[r, "\simeq"] & \tilde{K}(X \wedge S^2) & \oplus & \tilde{K}(X) & \oplus & \tilde{K}(S^2) & \oplus & \mathbb{Z}
\end{tikzcd}
$$

が可換であることから従う．左下の同型は fundamental product theorem (Fact 3.17) である． □

Corollary 3.21
n 次元球面 S^n の $\tilde{K}$ は Abel 群として

$$
\tilde{K}(S^n) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{if } n \text{ is even,} \\ 0 & \text{if } n \text{ is odd} \end{cases}
$$

である[*20]．とくに, n が偶数 $n = 2m$ であるとき, $\tilde{K}(S^2)$ は m 回のクロス積 $(\eta - 1) * \cdots * (\eta - 1)$ によって生成される (ここで, $\eta \to S^2 = \mathbb{C}P^1$ は自然直線束である.).

Proof)
$\tilde{K}(S^0) \simeq \mathbb{Z}$ であり, 円周上の複素直線束はすべて自明であったから $\tilde{K}(S^1) = 0$ である．このことと, β の具体的な表示より従う． □

4 可除代数の存在問題

さて, 念願であった問題の解決に取り組もう．最終的には次を示す．

Theorem 4.1 (Adams)
次は同値である．

1. $\mathbb{R}^n$ が可除代数の構造を持つ．
2. S^{n-1} は平行化可能である．すなわち, S^{n-1} 上に $n-1$ 個のベクトル場 $X_1, \ldots, X_{n-1}$ であって, 各点 $p \in S^{n-1}$ で $\{X_1(p), \ldots, X_{n-1}(p)\}$ が接空間 $T_p S^{n-1}$ の基底をなすものが取れる．
3. $n = 1, 2, 4, 8$.

3 ならば, 1 または 2 であることは既に見たので逆を示せば良い．まず, 1 または 2 は球面上の写像の問題に帰着することを示す．

4.1 H-空間

位相群の概念を拡張したものが H-空間である．

[*20] $\tilde{K}(S^{2m})$ は自明な積 (任意の元に対して, 積を取ると 0 となる.) をもつので, 環としては $\mathbb{Z}$ ではない．

Definition 4.2 (H-空間)
点付き空間 (X, e) が H-空間 (H-space) であるとは, ある連続写像 $m : (X \times X, (e, e)) \to (X, e)$ が存在して, $m(x, y)$ を xy と書くことにすると, 任意の点 $x \in X$ に対して

$$xe = ex = x$$

が成り立つことを言う.

Example 4.3
たとえば, $S^1 \subset \mathbb{C}$ には $\mathbb{C}^\times := \mathbb{C}\backslash\{0\}$ から定まる積によって H-空間となる. このように, 位相群と呼ばれるものは H-空間となる. 同様に $\mathbb{H}^\times$ や $\mathbb{O}^\times$ から定まる積によって S^3 と S^7 は H-空間となるから, n 次元球面 S^n が H-空間の構造を持つかどうかは今回考えている問題と関係がありそうだが, 実は次が成り立つ.

Lemma 4.4
次が成り立つ.

1. $\mathbb{R}^n$ が可除代数の構造を持つならば, S^{n-1} は H-空間である.
2. S^{n-1} が平行化可能ならば, S^{n-1} は H-空間である.

Proof)

1. $\mathbb{R}^n$ の可除代数の積を xy のように表すと, 可除代数の単位元 $e \in S^{n-1}$ に対し,
$$m : (S^{n-1} \times S^{n-1}, (e, e)) \to (S^{n-1}, e), \quad (x, y) \mapsto \frac{xy}{|xy|}$$
は S^{n-1} に H-空間の構造を与える[*21].
2. ベクトル場 $\{X_1, \ldots, X_{n-1}\}$ を平行化可能の定義におけるベクトル場とする. Gram-Schmidt の直交化法により, 各点 $x \in S^{n-1}$ において $x, X_1(x), \ldots, X_{n-1}(x)$ が $\mathbb{R}^n$ における直交したベクトルであるようにできる. さらに, $e_1 := (1, 0, \ldots, 0)$ 周りの回転と添字の入れ替えにより, $x = e_1$ であるときに $X_1(e_1) = e_2, \ldots, X_{n-1}(e_1) = e_n$ が成り立つようにできる. これらのプロセスで連続性は保たれるから, 連続写像
$$\alpha : S^{n-1} \to SO(n), \quad x \mapsto (x, X_1(x), \ldots, X_{n-1}(x))$$
を考えることができ, これを用いて定義される連続写像
$$m : (S^{n-1} \times S^{n-1}, (e_1, e_1)) \to (S^{n-1}, e_1), \quad (x, y) \mapsto \alpha(x)y$$
は S^{n-1} に H-空間の構造を与える.

□

このことから, 我々の解くべき問題は次に帰着する:

S^{n-1} が H-空間の構造を持つならば, $n = 1, 2, 4, 8$ である.

n が奇数でないことは, $\tilde{K}(S^{n-1})$ の積構造からすぐに分かる. これについて見てみよう.

k と l を正の整数とする. Bott 周期性から, $\tilde{K}(S^{2k})$ は, k 個のクロス積 $(\eta - 1) * \cdots * (\eta - 1)$ によって生成される無限次巡回群 ($\eta \to S^2 = \mathbb{C}P^1$ は自然直線束である.) で, 自明な積, すなわち任意の元 $a, b \in \tilde{K}(S^{2k})$

[*21] 可除代数の積は双線形であるから, とくに連続写像であることに注意されたい.

に対して $ab = 0$ となる積を持つ (単位的とは限らない可換な) 環であった. 基点を固定すれば, 環として $K(S^{2k}) \simeq \tilde{K}(S^{2k}) \oplus \mathbb{Z}$ であったので, ある生成元 α を用いて $K(S^{2k})$ は多項式環 $\mathbb{Z}[\alpha]/(\alpha^2)$ として表される. また, Bott 周期性から定まる同型により, 任意のコンパクト Hausdorff 空間 X に対して, $K(S^{2k}) \otimes K(X)$ は $K(S^{2k} \times X)$ と同型であることを用いれば, $K(S^{2k} \times S^{2l})$ は, ある α, β を用いて $\mathbb{Z}[\alpha, \beta]/(\alpha^2, \beta^2)$ として表される. さらにここで, α と β はぞれぞれ $K(S^{2k})$ と $K(S^{2l})$ の生成元の引き戻しである. 以上のことに注意すれば, 次を得る.

Proposition 4.5
正の整数 k に対して, S^{2k} は H-空間の構造を持ち得ない.

Proof)
背理法で示す. S^{2k} が H-空間としての積 $m : S^{2k} \times S^{2k} \to S^{2k}$ を持つとして矛盾を導く. m は連続写像なので, 環準同型 $m^* : K(S^{2k}) \to K(S^{2k} \times S^{2k})$ を誘導する. 先の考察から, これは多項式環の間の準同型 $m^* : \mathbb{Z}[\gamma]/(\gamma^2) \to \mathbb{Z}[\alpha, \beta]/(\alpha^2, \beta^2)$ を定めている.

Claim 4
ある整数 $q \in \mathbb{Z}$ が存在して $m^*\gamma = \alpha + \beta + q\alpha\beta$ が成り立つ.

Proof)
$\mathbb{Z}[\alpha, \beta]/(\alpha^2, \beta^2)$ の加群としての基底は $1, \alpha, \beta, \alpha\beta$ であるから, $m^*\gamma$ がこれらの線形結合で表されることは明らかである. よって, 示すべきは定数項がないことと α, β の係数が 1 であることである. $e \in S^{2k}$ を H-空間の単位元とすると, 包含写像

$$\begin{aligned} i_1 &: S^{2k} \to S^{2k} \times S^{2k}, \quad x \mapsto (x, e) \\ i_2 &: S^{2k} \to S^{2k} \times S^{2k}, \quad x \mapsto (e, x) \end{aligned}$$

を考えれば, 合成 $m \circ i_n$ は恒等写像である $(n = 1, 2)$. よって, 関手性により $i_n^* \circ m^*$ は恒等写像である. いまここで, i_1^* は 1 を 1 に, α を γ に, β を 0 に送り, i_2^* は 1 を 1 に, α を 0 に, β を γ に送るので, このことから主張は従う. □

この主張から,

$$m^*(\gamma^2) = m^*(\gamma)^2 = (\alpha + \beta + q\alpha\beta)^2 = 2\alpha\beta \neq 0$$

であるが, $K(S^{2k})$ において $\gamma^2 = 0$ であるので, これは矛盾である. □

よって, S^{n-1} が H-空間の構造を持つならば, n は奇数でないことがわかった. だがしかし, n が偶数であるときに考える場合は $\tilde{K}(S^{n-1})$ が 0 となってしまうことから, 上のような議論は期待できない. 実際に, Hopf 不変量という新しい情報を定義する必要がある.

4.2 Hopf 不変量

以降では, 球面 S^{n-1} の特に n が偶数の場合のみを考えれば良いのであった. とくに我々は, 連続写像 $g : S^{2n-1} \times S^{2n-1} \to S^{2n-1}$ に興味があった. このような g から, 連続写像 $\hat{g} : S^{4n-1} \to S^{2n}$ を次のように作る: 定義域の S^{4n-1} を $\partial(D^{2n} \times D^{2n}) \approx \partial D^{2n} \times D^{2n} \cup D^{2n} \times \partial D^{2n} = S^{2n-1} \times D^{2n} \cup D^{2n} \times S^{2n-1}$ と分

解し, 値域の S^{2n} も $S^{2n} = D^{2n}_{+} \cup D^{2n}_{-}$ と分解することにより[*22],

$$\begin{aligned} \hat{g}(x,y) &:= |y|\, g\left(x, \frac{y}{|y|}\right) \in D^{2n}_{+} \qquad \text{for } (x,y) \in S^{2n-1}\times D^{2n}, \\ \hat{g}(x,y) &:= |x|\, g\left(\frac{x}{|x|}, y\right) \in D^{2n}_{-} \qquad \text{for } (x,y) \in D^{2n}\times S^{2n-1} \end{aligned}$$

によって $\hat{g}$ を定める. この $\hat{g}$ を用いて, $4n$ 次元の円板を S^{2n} に接着した図形 $X_{\hat{g}}$ が定義される[*23]. すると, $X_{\hat{g}}/S^{2n} = S^{4n}$ であるから, $\tilde{K}(SS^{4n}) = \tilde{K}(S^{4n+1}) = 0$ であることなどを考えれば, 空間対 $(X_{\hat{g}}, S^{2n})$ の完全列は短完全列

$$0 \to \tilde{K}(S^{4n}) \xrightarrow{j^* = \mathrm{pr}^*} \tilde{K}(X_{\hat{g}}) \xrightarrow{i^* = \mathrm{incl}^*} \tilde{K}(S^{2n}) \to 0$$

となる. 以上の状況で, $\tilde{K}(S^{4n})$ の生成元 $(\eta-1)*\cdots*(\eta-1)$ を j^* で送ったものを $\alpha \in \tilde{K}(X_{\hat{g}})$ とおき, $\tilde{K}(S^{2n})$ の生成元 $(\eta-1)*\cdots*(\eta-1)$ に i^* で送られるものを $\beta \in \tilde{K}(X_{\hat{g}})$ とする. このとき, $i^*(\beta^2) = i^*(\beta)^2 = 0$ であるから, 上の列の完全性より, ある整数 h が存在して

$$\beta^2 = h\alpha$$

が成り立つ.

Claim 5
この h は β の取り方に依らずに決まる well-defined な量である.

Proof)
上の列の完全性より, β には α の整数倍 $m\alpha$ を足す分だけの不定性がある. $\alpha^2 = 0$ であるから, $(\beta + m\alpha)^2 = \beta + 2m\alpha\beta$ となることより, $\alpha\beta = 0$ を示せば十分である. いま, $i^*(\alpha) = 0$ であるから $i^*(\alpha\beta) = i^*(\alpha)i^*(\beta) = 0$ であるので, 完全性よりある整数 $k \in \mathbb{Z}$ が存在して $\alpha\beta = k\alpha$ となる. ゆえに, $k\alpha\beta = (k\alpha)\beta = (\alpha\beta)\beta = \alpha\beta^2 = \alpha(h\alpha) = h\alpha^2 = h\cdot 0 = 0$ となる. $\alpha\beta$ は j^* の像に含まれるのであったことと $\tilde{K}(S^{4n})$ は無限次巡回群であることから, これは $\alpha\beta = 0$ を意味する. □

Definition 4.6 (Hopf 不変量)
上で定義された整数 h を, 連続写像 $\hat{g}$ の Hopf 不変量 (Hopf invariant) という.

Lemma 4.7
連続写像 $m : S^{2n-1} \times S^{2n-1} \to S^{2n-1}$ が H-空間の積であるとき, m から先の構成法で構成される連続写像 $\hat{m} : S^{4n-1} \to S^{2n}$ の Hopf 不変量は ± 1 である.

Proof)
$e \in S^{2n-1}$ を H-空間の単位元とする. 先に述べたような有限胞体複体 $X_{\hat{m}}$ を考え, $\Phi : (D^{2n} \times D^{2n}, \partial(D^{2n} \times D^{2n})) \to (X_{\hat{m}}, S^{2n})$ を特性写像とする. 可換図式

[*22] ここで, $D^{2n}_{+} := \{(x_0, \ldots, x_{2n-1}) \in S^{2n-1} \mid x_{2n-1} \geq 0\}$, $D^{2n}_{-} := \{(x_0, \ldots, x_{2n-1}) \in S^{2n-1} \mid x_{2n-1} < 0\}$ である.

[*23] 一般に, 位相空間 X に連続写像 $f : S^{n-1} \to X$ を用いて D^n を接着させた空間とは, disjoint union $D^n \cup X$ において $x \in S^{n-1}$ と $f(x) \in X$ を同一視したことによって得られる商空間のことである.

$$
\begin{tikzcd}
\tilde{K}(X_{\hat{m}}) \otimes \tilde{K}(X_{\hat{m}}) \arrow[r, "m^*"] & \tilde{K}(X_{\hat{m}}) \\
\tilde{K}(X_{\hat{m}}, D^{2n}_-) \otimes \tilde{K}(X_{\hat{m}}, D^{2n}_+) \arrow[r, "m^*"] \arrow[u, "\simeq"'] \arrow[d, "\Phi^*\otimes\Phi^*"'] & \tilde{K}(X_{\hat{m}}, S^{2n}) \arrow[u, "j^*"'] \arrow[d, "\simeq"', "\Phi^*"] \\
\tilde{K}(D^{2n}\times D^{2n}, \partial D^{2n}\times D^{2n}) \otimes \tilde{K}(D^{2n}\times D^{2n}, D^{2n}\times \partial D^{2n}) \arrow[r, "m^*"] \arrow[d, "\simeq"'] & \tilde{K}(D^{2n}\times D^{2n}, \partial(D^{2n}\times D^{2n})) \\
\tilde{K}(D^{2n}\times\{e\}, \partial D^{2n}\times\{e\}) \otimes \tilde{K}(\{e\}\times D^{2n}, \{e\}\times\partial D^{2n}) \arrow[ur, "\simeq", "*"'] &
\end{tikzcd}
$$

を考える. 各写像の意味を順に説明する. まず, 左上の写像は可縮な部分空間 $D^{2n}_\pm$ を 1 点に潰す写像の誘導準同型であり, これは同型写像である. 次に, 左の 3 番目から 4 番めへの写像は, 可縮な空間 D^{2n} を 1 点 e に潰す写像によって引き起こされる同型である. また, 一番下から右斜め上に伸びる写像 $*$ はクロス積であり, これは Bott 周期性の繰り返しとして表されるので同型写像である.

さて, $\hat{m}$ の定義から $\hat{m}$ の $D^{2n}\times\{e\}$ への制限は D^{2n} への第 1 成分の射影と一致することから, Φ の制限

$$
\begin{aligned}
\Phi|_{D^{2n}\times\{e\}} &: D^{2n}\times\{e\} \to D^{2n}_- \\
\Phi|_{\{e\}\times D^{2n}} &: \{e\}\times D^{2n} \to D^{2n}_+
\end{aligned}
$$

は同相写像である[*24]. さらに, これらの引き起こす準同型 $(\Phi|_{D^{2n}\times\{e\}})^*\otimes(\Phi|_{\{e\}\times D^{2n}})^*$ は, 左側の縦の列の下 2 つの写像の合成写像であるから, 縦の列を全て合成した写像は, $\tilde{K}(X_{\hat{m}})$ の元 $\beta\otimes\beta$ を $\tilde{K}(D^{2n}\times\{e\}, \partial D^{2n}\times\{e\})\otimes\tilde{K}(\{e\}\times D^{2n}, \{e\}\times\partial D^{2n})$ の生成元に写す. よって, 図式の可換性から一番上の m^* は $\beta\otimes\beta$ を $\pm\alpha$ に写す. これは $\tilde{K}(X_{\hat{m}})$ において $\beta^2 = \pm\alpha$ が成り立つことを意味しているから, $\hat{m}$ の Hopf 不変量は ± 1 である. □

このことから, 我々が解くべき問題は次に移った:

連続写像 $f : S^{4n-1} \to S^{2n}$ の Hopf 不変量が ± 1 であるならば, $n = 1, 2, 4$ である.

4.3 Adams 作用素

Adams 作用素の導入により, Hopf 不変量に関する制約がより見易いものとなることが発見された. Adams 作用素は多項式の積のようなもので, 分裂原理を用いて定められる.

Theorem 4.8 (Adams 作用素の存在)
各自然数 k と各コンパクト Hausdorff 空間 X に対して環準同型 $\psi^k : K(X) \to K(X)$ が存在し, 次が成り立つ.

1. コンパクト Hausdorff 空間の間の任意の連続写像 $f : X \to Y$ に対して $f^*\circ\psi^k = \psi^k\circ f^*$ が成り立つ.
2. X 上の任意の直線束 $L \to X$ に対して, $\psi^k(L) = L^k$ が成り立つ.
3. 任意の自然数 k, l に対して, $\psi^k\circ\psi^l = \psi^{kl}$ が成り立つ.
4. 任意の元 $\alpha \in K(X)$ と任意の素数 p に対して $\psi^p(\alpha) \equiv \alpha^p \mod p$ が成り立つ.

[*24] ここで m が H-空間の積であるという仮定を用いている.

Proof)
まず, X 上のベクトル束 E で, 直線束の直和で表されるもの: $E \simeq L_1 \oplus \cdots \oplus L_n$ を考える. これに対して $\psi^k(E)$ を定めようと思うと, 環準同型であること性質の 2 番目から $\psi^k(E) = L_1^k + \cdots + L_n^k$ となる. 我々はこれより, 外積 $\Lambda^1(E), \ldots, \Lambda^k(E)$ を変数とする整数係数多項式 $s_k(\Lambda^1(E), \ldots, \Lambda^k(E))$ であって,

$$L_1^k + \cdots + L_n^k = s_k(\Lambda^1(E), \ldots, \Lambda^k(E))$$

が成り立つようなものを求めたい. $\lambda_t(E) := \sum_{i=0}^{\infty} \Lambda^i(E) t^i$ なる, 環 $K(X)$ を係数に持つ多項式[*25] を考える. 一般に,

$$\Lambda^k(E_1 \oplus E_2) \simeq \bigoplus_{i=0}^{k} \Lambda^i(E_1) \otimes \Lambda^{k-i}(E_2)$$

が成り立つことから, $\lambda_t(E_1 \oplus E_2) = \lambda_t(E_1)\lambda_t(E_2)$ である. ゆえに, $\lambda_t(E) = \prod_{i=1}^n \lambda_t(L_i) = \prod_{i=1}^n (1 + L_i t)$ となり, t^j の係数は j 次の基本対称式 $\sigma_j(L_1, \ldots, L_n)$

$$\Lambda^j(E) = \sigma_j(L_1, \ldots, L_n)$$

である. 対称式の基本定理より, 対称式 $L_1^k + \cdots + L_n^k$ は基本対称式 $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ の多項式として

$$L_1^k + \cdots + L_n^k = s_k(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) = s_k(\Lambda^1(E), \ldots, \Lambda^n(E))$$

と表される. これを用いて

$$\psi^k(E) := s_k(\Lambda^1(E), \ldots, \Lambda^n(E))$$

と定めると

$$\psi^k(E) = L_1^k + \cdots + L_n^k$$

が成り立つ. まだ, 直線束の和で表されるようなベクトル束にしか ψ^k を定めていないが, 次の事実からこれは一般のベクトル束に対する定義へと拡張できる[*26].

Fact 4.9 (分裂原理)
コンパクト Hausdorff 空間 X 上のベクトル束 $E \to X$ に対して, あるコンパクト Hausdorff 空間 $F(E)$ と連続写像 $p : F(E) \to X$ が存在して次が成り立つ:

- p が誘導する準同型 $p^* : K(X) \to K(F(E))$ は単射である.
- E を p で引き戻すと直線束の和に分裂する: $p^*E \simeq L_1 \oplus \cdots \oplus L_n$.

この事実は分裂原理 (splitting principle) と呼ばれている.

こうして定まった ψ^k が主張を満たすことを見ることは容易であるので, ここでは省略する. □

Lemma 4.10
任意の正の整数 n に対して, $\psi^k : \tilde{K}(S^{2n}) \to \tilde{K}(S^{2n})$ は k^n 倍写像である.

[*25] i が E の階数を超えれば $\Lambda^i(E) = 0$ となることから, この和は有限和であることに注意されたい.
[*26] 証明は [5] などを見られたい.

Proof)
正の整数 n に関する帰納法で示す．まず, $n=1$ のときについて示す．$\tilde{K}(S^2)$ は $\alpha := \eta - 1$ で生成されるので, α についてのみ示せば十分であるが, これは Adams 作用素の定義から

$$\psi^k(\alpha) = \psi^k(\eta - 1) = \psi^k(\eta) - \psi^k(1) = \eta^k - 1 = (1+\alpha)^k - 1 = 1 + k\alpha - 1 = k\alpha$$

と計算できることより従う．つぎに $n \geq 2$ とし, n における成立を仮定して $n+1$ における成立を示す．Bott 周期性より, クロス積の定める環準同型 $* : \tilde{K}(S^2) \otimes \tilde{K}(S^{2n}) \to \tilde{K}(S^{2n+2})$ は同型であったので, $\tilde{K}(S^{2n})$ の生成元 $(\eta-1) * \cdots * (\eta-1)$ を β とおくと $\tilde{K}(S^{2n+2})$ の生成元は $\alpha * \beta$ と表され, これについて

$$\begin{aligned}\psi^k(\alpha * \beta) &= \psi^k((\mathrm{pr}_1^*\alpha)\cdot(\mathrm{pr}_2^*\beta)) = \psi^k(\mathrm{pr}_1^*\alpha)\cdot\psi^k(\mathrm{pr}_2^*\beta)) = \mathrm{pr}_1^*\psi^k(\alpha)\cdot\mathrm{pr}_2^*\psi^k(\beta) \\ &= \psi^k(\alpha) * \psi^k(\beta) = k\alpha * k^n\beta = k^{n+1}\alpha * \beta\end{aligned}$$

となることから, $\tilde{K}(S^{2n+2})$ についても主張が成立すると分かる． □

4.4 Theorem 4.1 の証明

念願の Theorem 4.1 の証明を終えよう．すなわち, 次を示す．

Theorem 4.11
連続写像 $f : S^{4n-1} \to S^{2n}$ の Hopf 不変量が ± 1 であるならば, $n = 1, 2, 4$ である．

Proof)
先に述べたように, Hopf 不変量 h が $\beta = h\alpha$ という形で定義されているとする．このとき, Adams 作用素 $\psi^k : \tilde{K}(X_f) \to \tilde{K}(X_f)$ に対して, 先の補題から $\psi^k(\alpha) = k^{2n}\alpha$ であり, また, ある整数 μ_k が存在して $\psi^k(\beta) = k^n\beta + \mu_k\alpha$ が成り立つ．いま, 自然数 k, l に対して $\psi^k \circ \psi^l = \psi^l \circ \psi^k$ であるから, $\psi^k(\psi^l(\beta)) = \psi^k(l^n\beta + \mu_l\alpha) = l^n\psi^k(\beta) + \mu_l\psi^k(\alpha) = l^n(k^n\beta + \mu_k\alpha) + \mu_l k^{2n}\alpha = l^n k^n\beta + (\mu_k l^n + \mu_l k^{2n})\alpha$ は $\psi^l(\psi^k(\beta)) = k^n l^n\beta + (\mu_l k^n + \mu_k l^{2n})\alpha$ に等しい．ゆえに,

$$\mu_k l^n + \mu_l k^{2n} = \mu_l k^n + \mu_k l^{2n}$$

を得る．とくに $k = 2$, $l = 3$ として,

$$2^n\mu_3(2^n - 1) = 3^n\mu_2(3^n - 1)$$

が成り立つ．一方で, $2^n\beta + \mu_2\alpha = \psi^2(\beta) \equiv \beta^2 = h\alpha \mod 2$ が成り立つから, $\mu_2 \equiv h = \pm 1 \mod 2$ であり, μ_2 は奇数であることが分かる．よって, 上式から, 2^n は $3^n - 1$ を割りきらねばならないが, 初等整数論よりこれが起こるのは $n = 1, 2, 4$ となるときだけである． □

References

[1] J.Adams. On the Non-Existence of Elements of Hopf Invariant One. *Ann. of Math.*, Vol. 72, No. 1, pp. 20–104, 1960.

[2] J.Adams and M.Atiyah. *K*-Theory and the Hopf Invariant. *Quart. J. Math.*, Vol. 17, No. 1, pp. 31–38, 1966.

[3] M.Atiyah and R.Bott. On the Periodicity Theorem for Complex Vector Bundles. *Acta Math.*, Vol. 112, No. 1, pp. 229–247, 1964.

[4] R.Bott. The Stable Homotopy of the Classical Groups. *Ann. of Math.*, Vol. 70, No. 2, pp. 313–337, 1959.

[5] A.Hatcher. *Vector Bundles and K-Theory* (lecture note). 2009.

[6] J.W.Milnor. *Morse Theory.* Annals of Mathematical Studies 51. Princeton University Press, 1963.

[7] J.W.Milnor. *Topology from the Differentiable Viewpoint.* The University Press of Virginia Charlottesville, 1965.

[8] 日本数学会編. 岩波 数学辞典. 岩波書店, 第 3 版, 1985.