

結晶群のおはなし

金村佳範*

慶應義塾大学理工学部数理科学科 2 年

2015 年 12 月 12 日

1 はじめに

高校の時に化学で結晶構造について扱った記憶がある方は多いと思います。この結晶構造に限らず、自然界にはいたるところに対称性のある図形を見出すことが出来ます。また人類は古くから対称性のある模様を美を感じ、様々な建造物に対称性のある模様を装飾として用いてきました。

ところで、このような対称性のある図形は合同変換群という概念を考えることによって数学的に記述することが出来ます。数学的に記述すると図形のパターンを分類するなどの操作が容易にでき、図形の性質をより深く調べることにもつながります。図形の対称性を表すのに線対称や点対称などの言葉がありますが、このような言葉を聞いたことがある方は多いでしょう。合同変換群ではこのような図形の対称性を正確に考えることを行います。

今回はこのような合同変換群のうち、先に挙げた結晶構造や対称性のある模様を分類する際に登場する結晶群についてゆるく紹介していこうと思います。結晶群は物質科学において広く応用されており物理的な応用が強い一方で、今回結晶群を考えていく中で登場する数学的な概念は双曲幾何につながるなど数学的にも物理的にも興味深い対象になっています。結晶群がどのように用いられているのか、また群と幾何の交わりについて少しでも感じ取ってもらえればと思います。

2 講演内容

今回話す内容としては主に以下の内容を予定しています。

- 合同変換群とは何か。

* kana1118yoshi@z7.keio.jp

- 一次元結晶群の分類について.
- ユークリッド平面における合同変換群の離散部分群の分類と結晶群の関連性.

一次元結晶群とは数直線における合同変換群の部分群を考えていることにあたります. また, 三つ目にある分類については次の定理があります.

定理 1. ユークリッド平面における合同変換群の離散部分群は以下のように分類される.

1. 恒等変換のみからなる群
2. 17 種類の平面結晶群
3. 7 種類のフリーズ群 □

今回はこの定理の証明の概略を述べることを目標に講演を行います. この定理の証明として代数的な方法を考えることもできますが, 今回はあえてオービフォルドを用いた幾何的な証明を考えていくことにします. 時間の都合上おそらく最後の項目に関しては当日の講演内で詳しく説明することは厳しいことが見込まれますが, レジユメの方には出来る限り詳細を掲載する予定です.

最後に前提条件ですが, 出来るだけその場で用いる用語は説明するようにしますが時間の都合で軽い紹介にとどめる可能性が高いので以下の概念については予め見ておくによりわかりやすくなると思われます.

群の定義と群の例, 群の作用と軌道, 合同変換群

参考文献

- [1] 河野俊. 結晶群. 共立講座 数学探検 第7巻. 共立出版. 2015.
- [2] D.L.Johnson. “*Symmetries*”. Springer undergraduate mathematics series. Springer. 2001.