有限体上の曲線と整数論

沖　泰裕

東京工業大学理学部数学科 3 年

2015 年 12 月 12 日

1　はじめに

Fermat の最終定理とは, 自然数 $n \geq 3$ に対し

$$x^n + y^n = 1 \tag{1}$$

をみたす有理数解は存在しない, という主張のことである. この主張を示すことは非常に難しい. そこで, 問題を簡単にするために, p を素数として (1) の解の範囲を有限体 $\mathbb{F}_p := \{0, 1, \ldots p-1\}$[*1]としたものを考える. こうすれば, 具体的に元を代入するだけで答えがわかる. このように一見単純に見えるこの問題はしかし, 整数論や ζ 関数と深い関わりをもっている. また, 方程式を "曲線" として捉えることで, 前述の結びつきが見通しの良いものとなる.

本講演では, (1) の $\mathbb{F}_p$ 解の考察を軸として, 上に述べたことの一端を見ていく.

2　講演内容

まず, 有限体やその有限次拡大について簡単に振り返る. 次に, Gauss 和および Jacobi 和を導入し, (1) の $\mathbb{F}_p$ 解の個数について考察する. そして, 有限体上の曲線に対して合同 ζ 関数と呼ばれる関数を導入し, その性質を見ていく. 特に, 曲線における点の個数についての情報と合同 ζ 関数の零点の情報との関係について議論する. 最後に, 有限体上の曲線や ζ 関数にまつわるさらに進んだ話題について簡単に触れる予定である.

有限の数の世界にこのような現象が存在することは, とても不思議なことである. 本講演においてその雰囲気だけでも感じていただければ幸いである.

[*1] この記法は正確ではない. 詳しい説明は講演でする予定である.

参考文献

[1] 山崎隆雄, 初等整数論 数論幾何への誘い, 共立出版, 2015.

[2] L.C. Washington, *Introduction to Cyclotomic Fields Second Edition*, GTM83, Springer, 1997.

[3] 雪江明彦, 整数論 2 代数的整数論の基礎, 日本評論社, 2013.

[4] 加藤和也, 黒川信重, 斎藤毅, 数論 I Fermat の夢と類体論, 岩波書店, 2005.

[5] 黒川信重, 栗原将人, 斎藤毅, 数論 II 岩澤理論と保型形式, 岩波書店, 2005.

[6] Qing Liu, *Algebraic Geometry and Arithmtic Curves*, Oxford, 2002.