シンプレクティック幾何学入門 2

杉ノ内 萌

早稲田大学基幹理工学部数学科 3 年

2015 年 12 月 13 日

1　はじめに

解析力学における Hamilton 系とは, 相空間と呼ばれる偶数次元空間 M 上の, Hamiltonian と呼ばれる滑らかな関数 $H : M \to \mathbb{R}$ に対する微分方程式

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t)) = \left(-\frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t)), \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t))\right)$$

のことであった．ここで, $(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = (q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n)$ は M の座標である．Hamilton 系の解の挙動を, 時間発展に従って調べる分野を Hamilton 力学系という．解の時間発展を正確に記述することはほぼ不可能なことであるが, その周期性などを数学的に捉えられる現象が多数発見されている．その驚くべき事実の背景の 1 つとして, 解に沿った flow が正準変換となっていることが潜んでいることがある．夏の合宿における講演 “シンプレクティック幾何学入門 1” では正準変換で貼り合わされる図形としてシンプレクティック多様体を定義したが, 今回の問題意識ではこのシンプレクティック多様体が自然な舞台となる．

2　講演内容

本講演では Hamilton 力学系に関するトピックの 1 つを紹介する．今回は入門的な内容のみを紹介することとし, 前提知識は要求しない．幾何の言葉を使う側面が出ることもあると思うが, 具体的なイメージが湧くよう努力する．

参考文献

[1] H.Hofer and E.Zehnder. Symplectic Invariants and Hamiltonian Dynamics. Birkhäuser. 1994