ネコでもわかる経路積分

桑田 健

岡山大学理学部物理学科 4 年

2015 年 12 月 13 日

概要

量子力学の波動関数はシュレディンガー方程式を解くことにより求める事が出来ることは岡山大学理学部物理学科の授業で繰り返し確認をする．一方、波動関数を積分方程式によって求める事はあまりない．そこで今回は積分方程式を導入し、簡単な場合の波動関数の計算およびシュレディンガー方程式の導出を行う．この積分方程式が経路積分と呼ばれているものである．

1　話の流れ

最初に粒子に対する運動エネルギー T およびポテンシャルエネルギー V よりラグランジアン L を $L = T - V$ と定義し、さらにそこから作用 S を

$$S[b,a] = \int_{t_a}^{t_b} L\ dt \tag{1}$$

と定義する．古典力学においては最小作用の原理により粒子の運動する経路 $\bar{x}$ は一つに定まる．一方量子力学では不確定性原理により経路を定めることができない．粒子の存在確率を

$$P(b,a) = |K(b,a)|^2 \tag{2}$$

とすると $K(b,a)$ はそれぞれの経路からの寄与 $\phi[x(t)]$ を足し合わせたものであり

$$K(b,a) = \sum \phi[x(t)] \tag{3}$$

と表せる．ここで

$$\phi[x(t)] = Cexp\left[\frac{i}{\hbar}S[x(t)]\right] \tag{4}$$

となり作用に比例する位相を持つ．これを積分に書き換えたものが経路積分であり

$$K(b,a) = \int_a^b \mathfrak{H}x(t)e^{\left(\frac{i}{\hbar}S[b,a]\right)} \tag{5}$$

と書く．$K(b,a)$ よりシュレディンガー方程式

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = H\psi \tag{6}$$

を導く．

2　注意

今回の話では経路積分が数学的に定義してよいか？といった数学的な話は一切しません (勉強中なので)．また基本的には参考文献の話をするだけですので読んだことのある方には大変申し訳ない内容になると思います．1 年生でも問題なく理解できる内容になっていると自負しています．

参考文献

[1]『量子力学と経路積分』R.P. ファインマン, A.R. ヒッブス著 北原和夫訳 みすず書房