統計力学と可解模型

杉本健太朗
大阪府立大学 理学部 物理科学科 4 年

2015 年 12 月 20 日

1 はじめに

統計力学とは，多体問題を系統的に扱い，その絶妙なチューニングの下で熱力学等の巨視的経験事実を導き出すことで知られている．
ところで，多体問題であることが本質的に効く現象として「相転移」があり，我々はそれらの**現象論と微視的な力学を繋ぐ**ことに興味がある．相転移の例に，（有限温度下での）磁性体の**自発磁化**がある．磁化の無い磁性体に磁場を掛け，再び磁場を切ると磁化が残り，それ自体が磁場の source になる．これを統計力学の立場から理解しようとする試みは長く続けられていて，有名な数理モデルに **Ising 模型**がある．強磁性，或いは反強磁性体の最も単純な格子模型と言われる Ising 模型について，我々はいくつかの結果を知っている．例えば，空間次元 $d = 2$ で格子の大きさが $N \times N$ の Ising model は，相互作用 J 及び座標 $(x, y) = (i, j)$ における z 方向のスピン変数 σ^z_{ij} を用いて

$$\mathcal{H} = -J \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \left(\sigma^z_{ij} \sigma^z_{i+1\, j} + \sigma^z_{ij} \sigma^z_{i\, j+1} \right) \tag{1}$$

という形の Hamiltonian で書かれるが，Onsager[9] が 1944 年に与えた一つの厳密解として

$$-\beta f_0 = \log 2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2\pi} \right)^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \left[\cosh^2 2K - \sinh 2K (\cos q_1 + \cos q_2) \right] dq_1 dq_2 \tag{2}$$

が知られている．ここで，自由エネルギー密度を $f_0 := -\lim_{N \to \infty} \dfrac{\log Z}{\beta N^2}$ で定義した．また，分配関数 Z は

$$Z := \mathrm{Tr}_\infty \left[\exp\left(-\beta \mathcal{H} \right) \right] \tag{3}$$

で与えられ，trace は可能な全ての状態について取るものとする．即ち，この模型では各々のスピン σ^z_{ij} が上下いずれを向くかに対して取っていて，状態の数は $\Omega = 2^{N \times N}$ と非常に大きく，**状態に関する和をどう取るか**が要である．

これに加え，**水の三相**の出現過程を理解することにも興味がある．H_2O 分子の集合体に過ぎない液体の水が凝固することを，水分子単体の微視的振る舞いから理解することは叶わない．むしろその**大きな自由度の結果**として，液相と固相の間に**相図上の壁 (wall)** が生まれ，我々の目には全く異なる物質的特性を示す．

2　発表の内容

2.1　統計力学と多体問題

まず初めに，統計力学の立脚点を明らかにする．初等的な量子論・統計力学 [6][7] を前提とした内容である．多体問題へのアプローチとして，①無限体積極限，②マクロな物理量の収束 を軸に議論する．

2.2　現象論と数理モデル

微視的な力学系と，その集合体が巨視的にどう振る舞うかを繋ぐ理論として，統計力学の機能を見る．特に，格子模型の例として **Ising 模型**を考え，空間次元 d と相転移現象の関わりを見る．相転移のある系にしばしば見られる**臨界現象**にも触れる．

2.3　数理モデルの厳密解

Ising 模型に加え，もう一つの代表例である **eight-vertex（頂点）模型**を紹介する．また，Ising 模型において本質的な転送行列法（method of transfer matrix）に対応する解法として，③ *Bethe* 仮設（*Bethe ansatz*）とその手法，及び ④ *Baxter* による組み紐との対応[1][2] を導入する．

2.4　まとめ

20 世紀後半において数理モデルが果たした役割として，物理現象の微視的理解は勿論，純粋数学の立場からも様々な結果を見ることが出来た．我々の知り得るモデルで ⑤完全に解ける（可解である） とはどういうことか，また**可解模型の存在意義，格子模型に関する具体的な研究** [3][4][5][8] についても述べる．

参考文献

[1] Rodney J Baxter. Partition function of the eight-vertex lattice model. *Annals of Physics*, Vol. 70, No. 1, pp. 193–228, 1972.

[2] Rodney J Baxter. *Exactly solved models in statistical mechanics.* Courier Corporation, 2007.

[3] Deepak Dhar. Studying Self-Organized Criticality with Exactly Solved Models. p. 47, sep 1999.

[4] Deepak Dhar and Ramakrishna Ramaswamy. Exactly solved model of self-organized critical phenomena. *Physical Review Letters*, Vol. 63, No. 16, pp. 1659–1662, oct 1989.

[5] Michio Jimbo. *Yang-Baxter equation in integrable systems*, Vol. 10. World Scientific, 1990.

[6] L D Landau and E.M. Lifshitz. *Quantum Mechanics (Non-Relativistic Theory) Course of Theoretical Physics , Volume 3, Third Edition.* Butterworth-Heinemann, 3 edition, 1 1981.

[7] L D Landau and E.M. Lifshitz. *Statistical Physics, Part 1, 3rd Edition (Course of Theoretical Physics, Vol. 5).* Butterworth-Heinemann, 3 edition, 4 1984.

[8] M. A. Martín-Delgado, M Roncaglia, and German Sierra. Stripe ansätze from exactly solved models. *Physical Review B*, Vol. 64, No. 7, p. 075117, jul 2001.

[9] Lars Onsager. Crystal statistics. i. a two-dimensional model with an order-disorder transition. *Physical Review*, Vol. 65, No. 3-4, p. 117, 1944.