

多様体のトポロジー

小林慎一郎*

慶應義塾大学 理工学部 数理科学科 3年

2015年12月20日

1 はじめに

数学に触れたことがある人なら, Poincaré 予想というもの聞いたことがあるだろう. Poincaré は, 著書『位置解析』の中で, 次のような予想を立てた.

予想 (Poincaré conjecture). 3次元球面と同じホモトピー型を持つ3次元閉多様体は3次元球面と同相である.

この予想は高次元へと一般化される.

予想 (Generalized Poincaré conjecture). n 次元球面と同じホモトピー型を持つ n 次元閉多様体は n 次元球面と同相である.

Smale は, なんとこの予想が $n \geq 5$ のときに肯定的であることを示した. どのように証明されたか, その物語を話すつもりである. この講演でトポロジーや微分トポロジーと呼ばれる分野に興味を持ち, 自分で勉強する気になってもらえたら幸いである.

2 講演内容

上に書いたように, 本講演は Smale がいかにして高次元 Poincaré 予想を解決したかを話すつもりである. 具体的には, Morse 関数とよばれる多様体上の特別な (たくさんあるのだが) 関数による多様体の『ハンドル分解』, Smale が示した『 h 同境定理』に至るまでのプロセス, 最後に高次元 Poincaré 予想の証明の順で話していく. 技術的な詳細には立ち入りすぎることはしないので, リラックスして聞いてもらいたい.

* kobashinichi@keio.jp

参考文献

- [1] J. Milnor, *Topology from the Differential Viewpoint*, Virginia University Press (1965).
- [2] ———, *Lectures on the h-Cobordism Theorem*, Princeton University Press (1965).
- [3] S. Smale, *The Generalized Poincaré Conjecture in Higher Dimensions*, Bull. Amer. Math. Soc. 66 pp.373-375 (1960).
- [4] ———, *Generalized Poincaré's Conjecture in Dimensions Greater Than Four*, Annals of Mathematics 74 pp.391-406 (1961).
- [5] ———, *On the Structure of Manifolds*, Amer. J. Math. 84 pp.387-399 (1974).
- [6] 田村一郎, 『微分位相幾何学』, 岩波書店 (1992).
- [7] 松本幸夫, 『Morse 理論の基礎』 (岩波講座 現代数学の基礎 15), 岩波書店 (1997).