グラフから学ぶ幾何学〜トポロジーへの誘い〜

小林慎一郎 *

慶應義塾大学理工学部数理科学科 3 年

2015 年 6 月 6 日

1 はじめに

私たちは中学校で, 平面図形の合同・相似という概念を学んだ。互いに合同 (相似) な図形は “同じもの” とみなし, 区別してきた。これが私たちがおそらく最初に学んだ “分類” だろう。このように, 図形・空間を何かしらの方法をもって分類する, というのは幾何学における大きな目標の 1 つである。また, 空間を特徴づける性質を研究する, というのも幾何学の問題でよくあることである。例えば, 以下の主張を見てみよう。

主張: Poincaré Conjecture
単連結で閉じている 3 次元多様体は 3 次元球面と同相である。

3 次元球面 (と同相な 3 次元多様体) は単連結で閉じているが, 実はその逆も成り立つ, すなわち, 3 次元球面 (と同相な 3 次元多様体) は, 単連結・閉じている, という 2 条件で特徴づけられる, ということを主張している。ちなみにこれは Poincaré 予想と呼ばれていたものであり, ロシアの数学者 Perelman によって肯定的に解決された。

図形・空間を分類するうえで重要なものに, 不変量と呼ばれるものがある。不変量とは, 同じ図形・空間が持っている性質を抽出したものである。また, 不変量から幾何的な情報をある程度復元することができる。例えば, 空間の連結性や “穴” の数はホモロジー群という不変量から復元できる。

2 講演内容

この講演ではまず, グラフという図形を導入し, グラフの同相, ホモロジーなどの基本的用語を視覚的に理解できるように説明する。そして, ホモロジーからグラフの幾何的な情報が復元できることと不変量になっていることを見る。
グラフを高次元化すると, ‘単体的複体’ が得られる。単体的複体に対してもホモロジーが定義できる。

* kobashinichi@keio.jp

例として球面のホモロジー群を計算する。その応用として, Euclid 空間の次元の位相不変性, すなわち以下を示す;

前半の目標: Dimension Invariance Theorem

$\mathbb{R}^n$ と $\mathbb{R}^m$ が同相ならば, $n = m$ でなければならない。

この事実は一見自明に思えるかもしれないが, $\mathbb{R}^n$ も $\mathbb{R}^m$ もともに連続体濃度を持つので, この 2 つの集合の間には $n = m$ のときはもちろん, $n \neq m$ であっても全単射があるということを注意しておく。ここまでは新入生向けとし, 後半は位相空間の特異ホモロジー, コホモロジーを導入し, 位相幾何学がどのような形で利用されているか, 例として一般化された Poincaré 予想の証明 (の概略) の中で見ていく。

後半の目標: Generalized Poincaré Conjecture in Dimensions $\geq$ 5

n (≥ 5) 次元可微分多様体 M は, 単連結で閉じているとする。
この条件のもとで M が n 次元球面 S^n と同じホモトピータイプを持つ, すなわち

$$H_q(M) \simeq H_q(S^n) \ \ (q = 0, 1, 2, \cdots)$$

が成り立つならば, M は S^n と同相である。

参考文献

[1] 瀬山士郎, トポロジー:柔らかい幾何学, 日本評論社 (2003)
[2] 阿原一志, 計算で身につくトポロジー, 共立出版 (2013)
[3] 加藤十吉, 位相幾何学, 裳華房 (2002)
[4] 枡田幹也, 代数的トポロジー, 朝倉書店 (2002)
[5] 田村一郎, 微分位相幾何学, 岩波書店 (1992)
[6] Alexandru Scorpan, *THE WILD WORLD OF 4-MANIFOLDS*, American Mathematical Society(2005)