

大学受験レベルの数学を用いて Schrödinger方程式からトンネル効果を計算してみよう

東北大学理学部宇宙地球物理学科2年 日野 太陽

1.はじめに

量子力学は現代物理学の根幹をなす理論である。古典力学との相違として、粒子の波動性、確率解釈や不確定性原理などが挙げられる。トンネル効果もまた古典力学では説明できない現象のひとつである。今回の講義では数式を用いてトンネル効果の計算を行うことで量子力学の一端に触れ、さらには α 崩壊という量子力学でしか説明のできない現象を具体的に計算することでトンネル効果に対する理解を深めることを目的とした。

2.講義内容

1次元のSchrödinger方程式は以下のように表せる。

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x, t) + V(x) \psi(x, t)$$

この方程式を出発点としてトンネル効果が起こる確率を計算する。

この方程式から時間に依存しない1次元Schrödinger方程式が導出でき、

ポテンシャル $V(x)$ が定まれば、微分方程式から波動関数は定まることが言える。

講義では最初に簡単なポテンシャル障壁の問題を考えることでトンネル効果の基本的な考え方を学習し、その後ポテンシャルを一般の形に拡張した場合の透過確率を求め

$$T \simeq \exp \left[-\frac{2}{\hbar} \int_a^b \sqrt{2m(V(x) - E)} dx \right]$$

で与えられるGamovの透過因子を導出する。

最後に具体的な例として α 崩壊を扱い、実験事実と計算結果が一致することを示し、巨視的には実感しにくい量子力学が、ミクロの世界ではきちんと成り立っていることを実感する。

3.参考文献

量子力学1 猪木慶治・川合光 講談社サイエンティフィク