

# Kähler 多様体の幾何学

井上瑛二

東京大学理学部数学科学部 4 年

2015 年 12 月 6 日

## 1 はじめに

「複素構造」、「Riemann 計量」、「シンプレクティック構造」の三つ巴が織りなすドラマチックな幾何学の大舞台「Kähler 多様体」。小平邦彦らが基礎研究を行った空間のクラスとして知られているが、この研究の先に Kähler 多様体が舞台となる「面白い幾何学」が数多あり、現在も様々な方面から精力的に研究され、おそらく未だに手を付けられていない原生の幾何学が隠れ潜んでいる。

今回の講演では、その内のひとつ、Yau や Tian の研究を受け継ぎ Donaldson らの参入により活発化した多様体上の非線形偏微分方程式の解の存在にまつわる幾何学的景観をお話したい。

この拙い講演で Kähler 幾何に興味を持ち、基礎理論から一歩ずつ確実な勉強を積み上げ、あらゆる努力を尽くして感性を磨き、我こそはと原生の地を開拓する方が現れてくれたら、これを無上の喜びと言わずなんというのか。

## 2 講演内容

初めに三種の幾何構造の由来や各構造がもたらす空間の解釈を説明する。時間の制限から黒板に丁寧に書いている余裕はあまりないと思われるが、踏み場をこしらえ数学書を読むのとは雰囲気を変え、音楽のように感覚的に感じてもらいたい。本来こういう話し方はあまり好みではないが、聴衆の層も考えてふんわりと話す。必要なら [2] などを読むとよい。

本題のキーワードは、「Kähler-Einstein 計量」、「Monge-Ampere 方程式」、「二木不変量」、「モーメント写像」、「無限次元 GIT 安定性 (K 安定性)」、「Fano 多様体」、「モジュライ」、等々であり、これらがお互いに関わりあう話をする。

物語は Calabi の予想を Yau が解決し、かの有名な Calabi-Yau 多様体が産声を上げた頃に遡る。これにより Riemann 面の場合に重要な役割を果たした Kähler-Einstein 計量が、

「係数が負と 0」の場合において高次元の複素多様体にも存在することが確かめられた。

しかし、残された「係数が正」の場合は Kähler-Einstein 計量が存在しない例があることを松島や二木が独立の方法で確かめ、計量の存在と複素多様体の性格の決定的な関係を明らかにすることが求められた。

Yau の弟子である Tian がこれを精力的に研究し、複素多様体の退化を考えて二木不変量を一般化することで、Kähler-Einstein 計量の存在が複素多様体個人の性格よりも、むしろ複素多様体のファミリーに関わることが明らかになった。

そこへ Donaldson らが参入し、Kähler-Einstein 計量の存在の問題は、いよいよ複素構造のモジュライの構成と密接に関わるようになるのである。

そして現在に至る。以上の流れと哲学、および自分が疑問に思っていることを説明したい。

## 参考文献

- [1] D.Joyce, *Riemannian Holonomy Groups and Calibrated Geometry*, Oxford Univ. Press
- [2] 今野宏, 微分幾何学, 東京大学出版
- [3] 中島啓, 非線形数学と複素幾何学, 岩波書店
- [4] G.Szekylihidi, *An Introduction to Extremal Kähler Metrics*, AMS
- [5] G.Tian, *Canonical Metrics in Kähler Geometry*, Birkhäuser Verlag
- [6] シン=トウン・ヤウ, スティーヴ・ネイデイス, 見えざる宇宙のかたち, 岩波書店