解析総論

荒井駿
京都大学理学部理学科数理科学系 3 回

2016 年 6 月 19 日

自己紹介

- どーも、むぎゅたんです。
- 無理を通して道理を蹴っ飛ばすお仕事をしています。
- 本当は数学徒ではありません。

どーでもいい話は置いておいてさっさといくよ

微分積分論

解析の心

- 解析とはいかに無限を支配するかという分野である

$\epsilon - N$ 論法

数列 a_n が α に収束するとは

$$^{\forall}\epsilon > 0,\ ^{\exists}N,\ s.t.\ n > N \Rightarrow |a_n - \alpha| < \epsilon$$

が成り立つことである。

微分積分論

解析の心

- 解析とはいかに無限を支配するかという分野である

$\epsilon - \delta$ 論法

関数 f が x_0 で連続とは

$$^{\forall}\epsilon > 0,\ ^{\exists}\delta,\ s.t.\ |x_0 - x| < \delta \Rightarrow |f(x_0) - f(x)| < \epsilon$$

が成り立つことである。

$\mathbb{R}$ は可分なのでこれは $\epsilon - N$ 論法で書くこともできる。

可算性

可算性は必要なのか

$\epsilon - N$ **論法は可算までしか扱えない。**
ネットやフィルターを用いれば可算に限らず極限を扱える。
cf. **ダルブー積分**

非可算集合上で sup **を取ることはよくあるが、非可算の級数を考えても仕方がない**
$\rightarrow$ **位相構造とベクトル空間の構造の狭間では可算性が重要**

評価とは

基本は $\epsilon - \delta$
いかに ϵ に落とし込むか $\rightarrow$ 不等式評価
扱いづらい無限を扱いやすい無限に

- 三角不等式

$$||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$$

- ヘルダーの不等式
- イェンゼンの不等式
- チェビシェフの不等式

評価とは

基本は $\epsilon - \delta$
いかに ϵ に落とし込むか $\rightarrow$ 不等式評価
扱いづらい無限を扱いやすい無限に

- 三角不等式
- ヘルダーの不等式

$$||fg||_{L^1} \leq ||f||_{L^p}||g||_{L^q}$$

- イェンゼンの不等式
- チェビシェフの不等式

評価とは

基本は $\epsilon - \delta$
いかに ϵ に落とし込むか $\to$ 不等式評価
扱いづらい無限を扱いやすい無限に

- 三角不等式
- ヘルダーの不等式
- イェンゼンの不等式

$$f\Big(\sum_{i=1}^{\infty} p_i x_i\Big) \leq \sum_{i=1}^{\infty} p_i f(x_i)$$

- チェビシェフの不等式

評価とは

基本は $\epsilon - \delta$
いかに ϵ に落とし込むか $\rightarrow$ 不等式評価
扱いづらい無限を扱いやすい無限に

- 三角不等式
- ヘルダーの不等式
- イェンゼンの不等式
- チェビシェフの不等式

$$\mu(\{x \in X : |f(x)| \geq y\}) \leq \frac{1}{t^2} \int_X f^2 d\mu$$

連続性

一様連続性

各点で一様に δ が取れる

ヘルダー連続

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^{\alpha}$$

リプシッツ連続

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|$$

微分可能性

リーマン積分

リーマン和

$\Delta = \{x_0, \cdots, x_n\}$ $(1 = x_0 \cdots < x_n = b)$ を $[a, b]$ の分割という。

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\delta_i \quad \xi_i \in (x_i - x_{i-1}), \delta_i = x_i - x_{i-1}$$

をリーマン和という。リーマン和の分割を 0 にする極限を f の $[a, b]$ でのリーマン積分と定める。

Δ は非可算なので、これはネットによる収束の議論が必要。

関数のクラス分け

関数の連続性、微分可能性、可積分性などを用いて関数のクラス分けをする

C^∞ 級と C^ω 級

k 階導関数が存在しそれが連続関数となる関数のクラスを C^k 級という。任意有限回微分可能な関数のクラスを C^∞ 級という。
各点でべき級数展開可能な関数のクラスを C^ω 級という。

C^∞ 級だが C^ω 級でない関数も存在する。

$\mathbb{R}$ のその他の性質

完備性

X を集合とする。このとき、任意のコーシー列が X で収束するとき、X は完備であるという。

中間値の定理

区間 $I = [a, b]$ で定義されている連続関数 f で、$f(a) < f(b)$ とする。このとき $[f(a), f(b)]$ の任意の点 γ に対して、$f(c) = \gamma$ を満たす点 c が I の中に存在する。

$\mathbb{R}$ の連結性から導かれる性質

ベクトル解析

好きな空間で解析していく

多変数ベクトル値関数は行列と同じようなもの

ベクトル値関数の全微分

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ が x で微分可能とは、ある (m,n) 行列 A が存在して、

$$\lim_{|h|\to 0} \frac{|f(x+h) - f(x) - Ah|}{|h|} = 0$$

となることである。

陰関数定理、逆関数定理

cf. **多様体**

線積分

線積分

曲線 $C = x(t)$ **で端点を** $x(a), x(b)$ **とするものに対して** C **に沿った** F **の線積分を、**

$$\int_C F = \int_a^b F(x(t)) \cdot x'(t) dt$$

で定める。

グリーンの定理、ストークスの定理、ガウスの定理

複素関数論

圧倒的""" 力"""

正則関数

$\mathbb{C}$ の開集合 D で定義された複素数地関数 f が点 $z \in D$ で複素微分可能であるとは、ある $\alpha \in \mathbb{C}$ が存在して

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(a)}{h} = \alpha$$

が成り立つことである。f が D の各点で複素微分可能であるとき f は D で正則という。

正則関数は関数のクラスの中でも化け物級の強さ

正則関数の性質

コーシーーリーマンの関係式

$z = x + yi$ と表示し、正則関数 f を 2 変数実関数 u, v を用いて、$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ と表示する。このとき、

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

が成り立つ

ここから様々な結果が得られる。
まず直ちに正則関数の実部と虚部は実関数として調和であることがわかる。
他にコーシーの積分定理など

積分公式

ベクトル解析と同じ要領で線積分を定義する。

コーシーの積分公式

D 上の正則関数 f と D 上の閉曲線 γ に対して、

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta$$

が成り立つ

ここから、正則関数は無限回微分可能、一致の定理などの恐ろしく強い性質が導かれる。

有理型関数

全域正則ではないが、正則にならない点が離散的に分布しているときは、十分性質が良い。
ローラン展開、留数定理

微分方程式
解析の花

微分方程式の例

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F$$

$$i\hbar\frac{\partial\phi}{\partial t} = H$$

世界のあらゆる"現象"を記述する $\to$ 世界の中心へ向かう理論

基本問題

- 与えられた微分方程式が解を持つか
- 解の持つ性質
- 解全体の形

解けるか分からない奴もいる

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \nabla)v = -\nabla p + \nu \Delta v + f(x,t)$$

難攻不落の超難問

基本問題

- 与えられた微分方程式が解を持つか
- 解の持つ性質
- 解全体の形

解の線形結合もまた解

解は初期値に対して存在
$\rightarrow$ 初期値が連続的に変化したとき解は連続的に変化するか？

常微分方程式

解の存在は証明可能

ピカール・リンデレーフの定理

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

の形の常微分方程式について、f が初期値 (x_0, y_0) を中心としたある区間で連続かつ有界とする。このとき局所的に一意な解が存在し、さらに f が y についてリプシッツ連続ならば大域的にも解は一意である。

cf. **バナッハの不動点定理**
高階の常微分方程式の場合も一階に帰着できる。

常微分方程式

解が存在するが解けるとは言っていない
非線形常微分方程式は一般には可解ではない $\to$ **カオス**
cf. **初期値安定性、力学系**

偏微分方程式

世界の中心へと続く地下迷宮

一般には解の存在すらわからない
よく知られた形（二階偏微分方程式）

- 波動方程式

$$\frac{1}{c}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

- 熱方程式

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}$$

- 楕円方程式

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

安定性理論

線形偏微分方程式の解法 $\cdots$ 有限差分法

有限差分法

微分を差分の形にし、初期値から有限回の線形方程式を解くことで解を近似する。

熱方程式などはこの方法で解ける
$\longrightarrow$ 解の変分についての安定性が必要

測度論

無限を測る

積分を単なる極限ではなく、無限和を取る操作だと思う。
無限和を取る土台、無限和が取れる体積概念 $\to$ 測度

測度

可算無限和、補集合を取る操作で閉じている集合族を σ 加法族という。σ-加法族 $\mathscr{B}$ から $\mathbb{R}$ への関数 μ で、

- $\mu(\emptyset) = 0$
- $0 \leq \mu(A) \leq \infty$
- $A_n \in \mathscr{B}(n = 1, 2, \cdots)$,
  $A_j \cap A_k = \emptyset(j \neq k) \Rightarrow \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$

を満たすものを測度という。

σ 加法族に含まれていない集合は測れない $\to$ 非可測集合

$\mathbb{R}^n$ 上の不変測度としてのルベーグ測度

測度の例

$\mathbb{N}$ 上の数え上げ測度（$\mathbb{N}$ の部分集合に対してその位数を返す）

不変測度

$\mathbb{R}^n$ 上の測度で合同変換について不変な測度が存在して、定数倍を除いて一意に定まる。

測度の完備化

測度 0 の集合の部分集合が可測となるように測度を拡張でき、この拡張は一意

$\mathbb{R}^n$ 上の不変測度の完備化をルベーグ測度という。

ルベーグ積分の構成

可測

測度の定義域に含まれる集合を可測集合という。関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ に対して、任意の a について $\{x; f(x) < a\}$ が可測集合であるとき、可測であるという。

可測でない集合も存在する $\to$ ルベーグ非可測集合の存在
可測な関数は単関数近似できることが知られている。

積分の構成

単関数についてその積分を
$\sum$（単関数の一つの値）$\times$（その値の逆像の測度）
として定め、可測な関数の積分をその極限として定める。

ルベーグ積分の性質

ルベーグ積分ではリーマン積分よりも簡単な仮定で積分操作ができる

ルベーグ収束定理

可測な関数列 f_n が関数 f に各点収束している。ここで可測関数 g が存在して、$|f_n(x)| \leq |g(x)|$ が成り立つとき、

$$\lim_{n \to \infty} \int f_n \, d\mu = \int f \, d\mu$$

が成り立つ。

ルベーグ積分ではリーマン積分よりも簡単な仮定で積分操作ができる

他にフビニの定理、微分と積分の順序交換、ラドンニコディムの定理などが成り立つ。

位相群上の測度

測度は任意の集合に σ 加法族の構造が入っていれば定義可能
特に局所コンパクトハウスドルフ位相群上での測度は重要

ハール測度

局所コンパクト位相群上には、群作用について右不変な測度が定数倍を除いて一意に存在する。

$\mathbb{R}$ 上でなくとも、局所コンパクトハウスドルフ位相群は解析をするのに十分性質が良い（cf. ベールのカテゴリー）

実解析

広がる関数の世界

L^p 空間

測度空間 Ω 上の可測関数で

$$||f||_p := \left(\int |f|^p \, d\mu\right)^{1/p} < \infty$$

を満たすようなもの全体をほとんど至る所等しい関数は同値として割って定義する。この空間を $L_p(\Omega)$ 空間という。

その他の関数空間

Ω 上 k 回偏微分可能な関数の集合を $C^k(\Omega)$、無限回偏微分可能な関数の集合を $C^\infty(\Omega)$ という。また、サポートがコンパクトな関数の集合を $C_0(\Omega)$ という。

フーリエ解析

フーリエ変換

関数 f に対して、

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int f(x) e^{-i\xi x} dx$$

を f のフーリエ変換という。

畳み込み

$$(f * g)(x) = \int f(x - y) g(y) dy$$

を f と g の畳み込みという。$f, g \in L^1$ のとき、

$$(f * g)\hat{}(\xi) = (2\pi)^{n/2} \hat{f}(\xi) \hat{g}(\xi)$$

世界の中心へ

L^1 空間、L^2 空間では畳み込みの意味で、反転公式が成り立つ。さらに L^2 空間ならパーセヴァルの公式も成り立つ。
cf. 完全正規直交系の存在

これを用いて、波動方程式の解の存在、熱方程式の安定性を証明できる。

超関数

超関数

次を満たす Ω の線形汎関数 T で、台が一様にコンパクトな関数列 $\{\phi_n\}$ で、全ての階の偏導関数が $n \to \infty$ で一様コンパクトに 0 に収束するものとする。このとき、T が超関数とは $(\phi_n) \to 0$ を満たすときである。

通常の関数との同一視

T_f を

$$T_f(\phi) = \int_\Omega f(x)\phi(x)dx$$

と定めるとこれは超関数であり、$f, g \in L^1_{loc}(\Omega)$ のとき、

$$T_f = T_g \Leftrightarrow f(x) = g(x) \quad a.e.\Omega$$

超関数

超関数

次を満たす Ω の線形汎関数 T で、台が一様にコンパクトな関数列 $\{\phi_n\}$ で、全ての階の偏導関数が $n \to \infty$ で一様コンパクトに 0 に収束するものとする。このとき、T が超関数とは $(\phi_n) \to 0$ を満たすときである。

ディラックのデルタ関数

$T_f(\phi) = \phi(a)$ と定義すると、これは超関数で（特に可積分関数ではなく）

$$T_f(\phi) = \int_\Omega f(x)\phi(x)dx = \phi(a)$$

が成り立つ。

弱微分

積分から微分へ

弱微分

L^1_{loc} の関数 f が α 階弱微分可能とは、任意の $\phi \in C_0^\infty$ に対して、

$$-\int f(x)\phi'(x)dx = \int f_\alpha(x)\phi(x)dx$$

が有限であるときで、f_α を f の弱導関数という。

弱微分によって超関数を微分することもできる。

ソボレフ空間

p 乗可積分かつ m 階以下の弱導関数が存在し、それらが全て p 乗可積分である関数全体をソボレフ空間 $W^{m,p}$ という。

再び世界の中心へ
弱解の存在

偏微分方程式の解は通常の意味で偏微分可能な関数ではなく、ソボレフ空間の元と見た方が自然である。$\longrightarrow$ 弱解

変分法

sobolev 空間上のある汎関数が最小値を取るときの値が弱解になることを示し、その後その解の微分可能性を調べる（正則性）

2 階線形楕円型方程式はこの方法で解ける

距離空間

いかに可算に落としこむか

解析にとって最低限必要な構造としての位相構造を考える

距離空間

集合 X と任意の $x, y, z \in X$ に対して、次の性質を満たす関数 $d : X \times X \to \mathbb{R}$ を X の距離といい、(X, d) を距離空間という。

- $d(x, y) \geq 0$
- $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
- $d(x, y) = d(y, x)$
- $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

可分性

稠密

D が位相空間 X で稠密とは D の閉包が X に一致することである

稠密とはその空間を近似できるということ

可分

X が可分とは可算な稠密集合が存在することである

可算集合で近似できる
距離空間なら可分性と第二可算性は同値

コンパクト性

解析にとってもコンパクト性は良い性質である
コンパクト集合上で連続関数は最大値を持つ

全有界

距離空間 (X, d) が、任意の ϵ に対して、半径 ϵ の有限個の開球で X を被覆できるとき、全有界であるという。

全有界は有界より強い（cf. 離散距離空間）
距離空間では、コンパクト性と完備かつ全有界が同値になる。

一様性

ボルツァーノ・ワイエルシュトラスの定理

距離空間がコンパクトであることと任意の無限点列が集積点を持つことは同値である。

同程度連続性

関数族 $\mathscr{F}$ が Ω で同程度連続とは、任意の $\epsilon > 0$ に対して、ある δ が存在して、

$$x, y \in \Omega,\ |x - y| < \delta \Rightarrow {}^{\forall} f \in \mathscr{F}, d(f(x), f(y)) < \epsilon$$

一様性

正規族

関数族 $\mathscr{F}$ が Ω で正規族であるとは、任意の $\mathscr{F}$ の関数列 $\{f_n\}$ が Ω でコンパクト一様収束するような部分列を含むことである。

アスコリ・アルツェラの定理

コンパクト距離空間上の一様有界かつ同程度連続な連続関数族は一様収束する部分列を含む

ベールカテゴリー

解析学最強定理

ベールのカテゴリー定理

任意の局所コンパクトハウスドルフ空間、完備距離空間はベール空間である。
すなわち、開稠密集合の高々可算個の共通部分は稠密

完備距離空間ならさらに、空でない完備距離空間が閉部分集合の可算和に書けるならば、その閉集合のうちの少なくとも一つは内部が空でないと言い換えることができる。
この定理は非常に強力（cf.$\mathbb{R}$ の非可算性、3 basic principles）

関数解析

もう一つの解析にとって最低限必要な構造 $\rightarrow$ ベクトル空間
ベクトル空間に距離構造を入れたもの $\rightarrow$ ノルム空間

ノルム空間

K 上のベクトル空間 V に対して、$^\forall a \in K, ^\forall u, v \in V$ に対して、次を満たす関数 $||\cdot|| : V \rightarrow \mathbb{R}$ をノルムという。

- $||v|| = 0 \Leftrightarrow v = 0$
- $||av|| = |a|\ ||v||$
- $||u + v|| \leq ||u|| + ||v||$

ノルムの定義された空間をノルム空間という。

有限次元の場合は R^n と同型、無限次元の世界はとても広い

バナッハ空間

L_p 空間や C^∞ 空間は無限次元ノルム空間であり、さらにバナッハ空間である。

バナッハ空間

ノルム空間が距離空間として完備であるときバナッハ空間という。

内積が定義されているバナッハ空間をヒルベルト空間という。

作用素

ノルム空間からノルム空間への写像を作用素という

作用素の連続性、有界性

作用素 $T : \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ が連続とは、

$$u_n \to u \in \mathscr{X} \Rightarrow Tu_n \to Tu \in \mathscr{Y}$$

が成り立つことである。
作用素 T が有界とは、ある M が存在して、任意の $u \in \mathscr{X}$ に対して、

$$||Tu||_{\mathscr{Y}} \leq M||u||_{\mathscr{X}}$$

が成り立つことである。

作用素が線形なら連続性と有界性は同値である。
また、0 での連続性から全体の連続性がわかる。

作用素

作用素ノルム

$\mathscr{X}$ から $\mathscr{Y}$ の有界線形作用素全体に次でノルムを入れる

$$||T|| = \sup_{||u|| \leq 1} ||Tu|| = \sup_{||u||=1} ||Tu|| = \sup_{u \neq 0} \frac{||Tu||}{||u||}$$

このノルム空間を $B(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ という。

$B(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ は $\mathscr{Y}$ がバナッハ空間ならば再びバナッハ空間になる。特に $B(\mathscr{X}, \mathbb{C})$ の元を $\mathscr{X}$ の有界線形汎関数という。

双対空間

解析することは再び解析できる

$\mathscr{X}$ の有界線形汎関数全体を双対空間 $\mathscr{X}^*$ という。
$\mathscr{X}$ がバナッハ空間ならば双対空間も再びバナッハ空間になる。
内積を取る操作を写像にするとそれは双対空間の元であるが、逆に

リースの表現定理

ヒルベルト空間 $\mathscr{H}$ において、任意の $f \in \mathscr{H}^*$ は、ある $v \in \mathscr{H}$ を用いて $f(u) =< u, v >$ と表せられる。ここで v は一意に定まり、$||v|| = ||f||$ である。

three basic principles

一様有界性原理

$\mathscr{X}$ をバナッハ空間とし、$T_\lambda \in B(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ とする。$\{T_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ が $\mathscr{X}$ の各点で有界なら一様に有界である。

開写像原理

バナッハ空間からバナッハ空間への有界線形作用素は開写像である。

ハーンバナッハの定理

劣加法的でスカラー倍が保存される作用素 p と部分空間で定義された有界線形汎関数 f が $f(u) \leq p(u)$ を満たしているとき、この不等式を満たしながら f を全域に拡張できる

スペクトル解析

共役作用素

$\mathscr{X}$ をヒルベルト空間とし、$T \in B(\mathscr{X})$ に対して、その共役作用素 T^* を、$< Tu, v >=< u, T^* v >, ^\forall u, v \in \mathscr{X}$ と定める。$T = T^*$ であるとき、T を自己共役作用素という。

スペクトル

T をバナッハ空間 $\mathscr{X}$ の閉作用素とし、I を恒等作用素、$\zeta \in \mathbb{C}$ とする。$\zeta I - T$ が 1 対 1 でない、または $(\zeta I - T)^{-1} \notin B(\mathscr{X})$ のとき、ζ をスペクトルという。

自己共役作用素はスペクトル分解可能

確率論

無限を利用する

正規化された有限測度 $\to$ 確率測度

独立性

σ 加法族の族 $\{\mathscr{F}_\lambda\}$ が確率測度 P に関して独立とは、任意有限個の λ_i について、任意の $A_i \in \mathscr{F}_{\lambda_i}$ に対して、

$$P(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1) \cdots P(a_n)$$

が成り立つことである。

確率変数の独立性

確率変数 X を可測にする最小の部分 σ 加法族を $\sigma(X)$ とする。このとき、$\{\sigma(X_\lambda)\}$ が独立であるとき、確率変数の族 X_λ が独立であるという。

独立性の性質

大数の法則

$\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ を独立で同分布を持つ確率変数列とする。$E(X_1) < \infty$ ならば、

$$\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} \to E(X_1) \quad a.s.$$

が成り立つ。

c.f. チェビシェフの不等式
他に 0-1law や中心極限定理などの重要な定理が成り立つ

力学系

複雑系を支配する

時間発展する系の空間の構造を調べる分野
元々非線形微分方程式の解についての理論
初期値を定めると相空間上に解曲線が描かれる
相空間の幾何的な分析、解曲線の安定性
cf. 構造安定性

測度論へ

エルゴード定理

T 不変な測度と可積分関数 f に対し、

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(T^i x) = \int_M f(x)d\mu \quad a.e.$$

位相的可遷性

$\rightarrow$ **フラクタル**

作用素環論

代数/幾何/解析のインターセクション

リースの表現定理から有界線形作用素に対して対合が定まる

対合

任意の $\xi, \eta \in \mathscr{H}$ **に対して、** $< x(\xi), \eta > = < \xi, y(\eta) >$ **が成り立つ作用素** y **を** x **の随伴作用素といい、** x^* **という。対応** $x \mapsto x^*$ **を対合という。**

バナッハ環、C^* 環

環上にノルムが定義されており、 $||xy|| \leq ||x|| ||y||$ **が成り立つものをノルム環、完備なノルム環をバナッハ環という。**
さらに対合が定義されており、 $||x^*|| = ||x||$ **かつ** $||xx^*|| = ||x||^2$ **が成り立つものを** C^* **環という。**

双対性

C^* 環と幾何との対応

ゲルファント双対

可換 C^* 環の圏と局所コンパクトハウスドルフ空間の圏は圏同値

非可換な幾何をやる上で非可換 C^* 環を用いる
(cf.K 理論)

確率解析

ゆらぎと共に

安定でない微分方程式は現実の系ではどうなっているかわからない。ゆらぎを含めたまま微分方程式を解く $\to$ 確率微分方程式

Brown 運動

連続確率過程でほとんど確実に $B_0 = 0$ で $B_t - B_s$ が平均 0、分散 $t - s$ の正規分布になるようなものを Brown 運動という。

Brown 運動を用いて偏微分方程式を解くことができる。

Brown 運動の二次変動を使って積分を構成する $\to$ 確率積分
確率積分の逆の操作におけるチェインルール $\to$ 伊藤の公式
確率微分方程式

最後に

解析の世界は広いがどこも繋がっている

最後に

解析の世界は広いがどこも繋がっている

さあ冒険に出かけよう