Lindelöf 空間の深淵

大阪大学理学部数学科 3 回生　湯地智紀

2016 年 6 月 25 日

1　はじめに

私たちはコンパクト空間についてはある程度よく知っています. 空間がコンパクトであるという条件は, 空間が非常に強くまとまっていることを意味しています. ほとんど有界閉集合のようなものです. 一方でコンパクトという条件は強すぎます. 例えば実数 R でさえもコンパクトとはならないのです. 有界閉集合において成り立つ Covering property, すなわち任意の開被覆が有限部分被覆を持つこと, を R において見出そうとしたフィンランドの数学者 Ernst Lindelöf は, "有限" の部分を "可算" で置き換えれば良いことに気づきました. これが今日では Lindelöf の定理と呼ばれている定理です. Heine-Borel の定理や Lindelöf の定理の発見後, 位相空間論が現代の形で整理されたのち Alexandrov と Urysohn により開被覆の言葉でコンパクト性が定義さ れました. そして, Lindelöf の定理にちなんで, 自然と Lindelöf 空間も現れたのです.

2　講演内容

Lindelöf 空間の定義は開被覆により行われます. 従って, その他多くの Covering property と類似性を持つことは必然です. 例えば正則な Lindelöf 空間はパラコンパクトです. 前半はこのような他の基本的な空間との関連を多く見ていきます. 基本的な定理は簡単な証明のスケッチもします. 中盤で少し基数関数の話をします. そこで今日では Arhangel'skiĭ の不等式と言われている定理を紹介し, それにまつわるいくつかの不等式と, Alexandrov の問題に関する歴史を軽く見ていきます. その後, 他の Lindelöf-type property について少し述べ, 最後に未解決問題をいくつか紹介します. 位相空間論における一つの目的意識として "良い空間のクラスを求める" というものがあります. 従って, 必然的に細かい空間の定義がたくさん出てきます. そしてそれと同じほど, 例, 反例が多く存在します. 紹介できるものはほんの一部でしかありませんが, 講演全体に渡って, 例をなるべく多く出そうと思います.

3　参考文献

[1] 児玉之宏, 永見啓応, 『位相空間論』, 岩波書店, 1974.

[2] P.Staynova,*A Comparison of Lindelöf-type Covering Properties of Topological Spaces*,RoseHulman Undergraduate Mathematics Journal,vol.12,no.2 , (2011).

[3] L. Steen,J.A. Seebach Jr.,*Counterexamples in Topology*,Dover Publications, Inc., New York, (1995).

[4] J.Nagata , *Modern General Topology*, North Holland, (1985).

[5] R.Engelking , *General Topology* , Heldermann Verlag, Berlin, (1989).