Lindelöf 空間の深淵

湯地 智紀

大阪大学理学部数学科 3 年

2016 年 6 月 24 日

この pdf では T_1 空間でない空間については何も考えない．すなわち, 位相空間といった場合には, 任意の一点集合は閉集合であるとする．すべての命題に証明をつけたわけではないが, ある程度満足して読める程度には証明を付けてあると思う．[*1]

先に全体の流れを俯瞰しておこう．まず最初は準備である．その次に Lindelöf と簡単な空間との関連を述べる．そして少し弱い Lindelöf 性について簡単な性質を述べたのち, 本講演のメインテーマである p 空間と Σ 空間へ至る導入として, Čech 完備空間の性質を簡単に述べる．最終的な目標は Lindelöf Σ 空間についての命題 6.9 である．

1　準備

標準的な位相空間論の言葉については知っているものとする．

被覆の細分, パラコンパクト

定義 1.1. X を位相空間, $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ を部分集合の族とする．

- $\mathcal{A}$ が被覆であって, 各 $A \in \mathcal{A}$ が開であれば, $\mathcal{A}$ を開被覆と言った．これと同じように, コンパクト被覆とか可算コンパクト閉被覆と言った語を用いる．
- $\mathcal{A}$ が**局所有限**（locally finite）であるとは, 任意の $x \in X$ に対しある近傍 $x \in U$ が存在し, $U \cap A \neq \emptyset$ なる $A \in \mathcal{A}$ が有限個となることである．
- $\mathcal{A}$ が**星有限**（star finite）であるとは, 任意の $A \in \mathcal{A}$ に対し $A \cap B \neq \emptyset$ なる $B \in \mathcal{A}$ が有限個となることである．
- $\mathcal{A}$ が**素**（disjoint）であるとは, どの異なる二つの元 $A, B \in \mathcal{A}$ も共通部分を持たないことである．
- $\mathcal{A}$ が**疎**（discrete）であるとは, 素かつ局所有限となることである．
- 局所可算, 星可算についても同様に定める．
- $\mathcal{A}$ が σ **局所有限**であるとは, 局所有限な部分族可算個の和集合となることである．σ 疎についても同様に定める．

[*1] 人によって満足度合いは異なるので, これでは満足いかない方もいるだろう．その場合には [2] や [4] や [6] などを参照してください．

- $Y \subset X$ に対し, $\mathrm{St}(Y, \mathcal{A}) = \bigcup\{A \in \mathcal{A} : A \cap Y \neq \emptyset\}$ と置き, これを $\mathcal{A}$ の S に関する**星型集合**, または単に**スター**（star）と言う．とくに Y が一点集合 $\{x\}$ の場合には $\mathrm{St}(\{x\}, \mathcal{A}) = \mathrm{St}(a, \mathcal{A})$ と略記する．
- $\mathcal{A}$ が $\mathcal{B}$ を**細分する**とは, 任意の $A \in \mathcal{A}$ に対し $A \subset B$ なる $B \in \mathcal{B}$ が存在することを言う．このとき $\mathcal{A} < \mathcal{B}$ とかく．さらにこの対応が全単射となるよう取れるとき, **1:1 細分**であるという．
- $f : X \to Y$ を（連続）写像, $\mathcal{C}$ を Y の部分集合族, $S \subset X$ とせよ．次の記号を導入する：$f(\mathcal{A}) = \{f(A) : A \in \mathcal{A}\}, f^{-1}(\mathcal{C}) = \{f^{-1}(C) : C \in \mathcal{C}\}, \mathrm{Cl}_X\mathcal{A} = \{\mathrm{Cl}_X A : A \in \mathcal{A}\}, \mathcal{A} \times \mathcal{C} = \{A \times C : A \in \mathcal{A}, C \in \mathcal{C}\}, S \cap \mathcal{A} = \{S \cap A : A \in \mathcal{A}\}$. つまり集合族に普通の集合の操作を行った場合には, 各元についてそれを行ったものの族を意味する．
- $\mathcal{A}^* = \{\mathrm{St}(A, \mathcal{A}) : A \in \mathcal{A}\}, \mathcal{A}^\Delta = \{\mathrm{St}(x, \mathcal{A} : x \in X\}$ をおく．さらに $\mathcal{B}^* < \mathcal{A}$ となるとき, $\mathcal{B}$ は $\mathcal{A}$ の**スター細分**（star refinement）であるという．
- 集合 X の被覆の列 $\mathcal{U}_n$ が, $\mathcal{U}_{n+1}{}^* < \mathcal{U}_n$ となるとき, **正規列**という．
- 位相空間 X の開被覆の列 $\mathcal{U}_n$ について, $\{\mathrm{St}(x, \mathcal{U}_n) : n \in \mathbf{N}\}$ が x の基本近傍系となるとき, $\mathcal{U}_n$ を**展開列**（development）という．
- 関数 $d : X \times X \to [0, \infty)$ が距離の条件のうち $d(x, y) = 0 \iff x = y$ 以外を満たすとき, **擬距離**（pseudo metric）という．さらに位相空間の擬距離は各開球 $B(x, r)$ が開であれば**連続**と言われる[*2].

細分という用語を用いれば, コンパクトであることは任意の開被覆が有限被覆で細分されると言い換えられる．Lindelöf についても全く同様に, 任意の開被覆が可算被覆で細分されると言い換えられる．

この pdf で使う可能性のある簡単な命題について先に述べておく：

命題 1.2. X を位相空間とする．

(1) X の閉集合からなる局所有限な $\mathcal{F}$ は, 任意の $\mathcal{H} \subset \mathcal{F}$ に対し $\bigcup\mathcal{H}$ が閉となる（この条件を $\mathcal{F}$ は**閉包保存**であるという）．

(2) X の部分集合の可算族 $\mathcal{U} = \{U_i : i \in \mathbf{N}\}$ と星有限な $\mathcal{A} = \{A_i : i \in \mathbf{N}\}$ について $\{A_i \cap U_j : i \leq j\}$ は星有限な可算族であって $\mathcal{U}$ を細分する．さらに $\mathcal{A}$ が被覆であり, 任意の $i \in \mathbf{N}$ に対し $A_i \subset \bigcup_{j \leq i} U_j$ であれば, $\{A_i \cap U_j : i \leq j\}$ もまた被覆となる．

(3) X の局所有限（局所可算）な開集合族は星有限（星可算）な開集合族により細分される．

Proof. 一つ目．$\mathcal{F}$ の部分族は局所有限であるから $\bigcup\mathcal{F}$ が閉であることを言えばよい．$x \notin \bigcup\mathcal{F}$ を任意に取ると, $\mathcal{F}$ は局所有限であるから, ある近傍 $x \in U$ があって $U \cap F \neq \emptyset$ となる $F \in \mathcal{F}$ は有限個．それらを $F_1, \cdots, F_n$ とすれば, F_i は閉であって $x \notin F_i$ であるので $x \in U_i, F_i \cap U_i = \emptyset$ となる近傍 U_i がとれる．$V = U \cap U_1 \cap \cdots \cap U_n$ は x の近傍であって $\bigcup\mathcal{F}$ と交わらない．

二つ目．$(U_i \cap A_j) \cap (U_k \cap A_l) \neq \emptyset, i \leq j, k \leq l$ とすれば, $A_j \cap A_l \neq \emptyset$ であるから, そのような j, l の組は有限個．i, k はそれぞれ j, l 以下であるから以上でこのような $(i, j), (k, l)$ の組は有限個とわかる．従って星有限である．任意に $x \in X$ をとれば, $x \in A_i$ なる i がとれ, さらに $A_i \subset \bigcup_{j \leq i} U_j$ より $x \in A_i \cap U_j$ なる $j \leq i$ がとれるので被覆であることもわかる．

三つ目．$\mathcal{U}$ を局所有限開集合族とする．$U \in \mathcal{U}$ に対して $x \in U$ を適当にとり, 局所有限性から $x \in V_U \subset U$ なる開集合 V_U であって $V_U \cap U' \neq \emptyset$ なる $U' \in \mathcal{U}$ が有限個しかないものをとる．このとき $\{V_U : U \in \mathcal{U}\}$ は明らかに星有限な開集合族であって $\mathcal{U}$ を細分する． □

[*2] 連続な擬距離がとくに距離であっても距離化可能とは限らない．Sorgenfrey 直線など．

集合の正規列 $\mathcal{U}$ に対して擬距離 d が, $\mathcal{U}_{n+1}^{\Delta} < \{B(x, 2^{-n}) : x \in X\} < \mathcal{U}_n^{\Delta}$ を満たすとき, d は $\mathcal{U}_n$ に**沿う**と言う.

命題 1.3 (ゲージ化補題)**.** X を集合とする. X の正規列 $(\mathcal{U}_n)$ に対し, それに沿う X 上の擬距離 d がある.

Proof. X の有限点列 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ で $x_0 = x, x_n = y$ となるもの全体を $s(x, y)$ と置く.
$D(x, y) = \inf\{2^{-n} : y \in \mathrm{St}(x, \mathcal{U}_n)\}$ とおいて,

$$d(x, y) = \inf\{\sum_{k=0}^{n-1} D(x_k, x_{k+1}) : \{x_0, \cdots, x_n\} \in s(x, y)\}$$

と定める. これが擬距離であることは明らかなので, 条件を満たすことを示す. そのためには $d(x, y) < D(x, y) < 2d(x, y)$ を示せば良いが, d の定め方から前半の不等号は明らか. 後半の不等号を示すためには, 任意の $x_j \in X, j = 0, 1, \cdots, k$ に対して $D(x_0, x_k) \le 2\sum_{j=0}^{k+1} D(x_j, x_{j+1})$ を示せばよい（なぜなら右辺の下限が $d(x_0, x_k)$）. 帰納法で示すが, $k = 1$ のときは明らかなので, 全ての $0 \le k \le r$ に対してこれが成り立つとき $k = r + 1$ で成り立つことを言う.
$a = \sum_{j=0}^{r} D(x_j, x_{j+1}), s = \max\{l : \sum_{j=0}^{l-1} D(x_j, x_{j+1}) \le a/2\}$ と置く. このとき $\sum_{j=0}^{s} D(x_j, x_{j+1}) > a/2$ なので,

$$\sum_{j=s+1}^{r} D(x_j, x_{j+1}) = a - \sum_{j=0}^{s} D(x_j, x_{j+1}) < a - a/2 = a/2.$$

また仮定から

$$D(x_0, x_s) \le 2\sum_{j=0}^{s-1} D(x_j, x_{j+1}) \le a,$$

$$D(x_{s+1}, x_{r+1}) \le 2\sum_{j=s+1}^{r} D(x_j, x_{j+1}) \le a,$$

$$D(x_s, x_{s+1}) \le a$$

であるので, $2^{-m} \le a$ となる最小の m をとれば, D の定め方から $D(x_0, x_s), D(x_s, x_{s+1}), D(x_{s+1}, x_{r+1}) \le 2^{-m}$ である. ある $U, U', U'' \in \mathcal{U}_m$ があって $\{x_s, x_{s+1}\} \subset U, \{x_0, x_s\} \subset U', \{x_{s+1}, x_{r+1}\} \subset U''$ なので $\{x_0, x_{r+1}\} \subset \mathrm{St}(U, \mathcal{U}_m)$. ここで $\mathcal{U}_m^* < \mathcal{U}_{m-1}$ ゆえ $x_{r+1} \in \mathrm{St}(x_0, \mathcal{U}_{m-1})$, これから $D(x_0, x_{r+1}) \le 2^{-m+1} \le 2a$. □

これからただちに次がわかる：

定理 1.4 (Alexadnroff-Urysohn の距離化定理)**.** 正規列を成す展開列を持つ位相空間は距離化可能.

Proof. ゲージ化補題で擬距離 d をとれば, これは連続な擬距離であってさらに展開列に沿うことから距離となるが, 展開列に沿っているので位相が合致していて定理が従う. □

集合 X 上に擬距離 d があれば, 同値関係 $x \sim y$ が $d(x, y) = 0$ で定まるので, これで割った距離空間 X/d ができることに注意しよう. 従って正規列があれば距離空間への全射ができる.
さて, パラコンパクトの定義をしよう.

定義 1.5.
- 位相空間 X が**パラコンパクト**であるとは, 任意の開被覆が局所有限開被覆で細分されることを言う. 明らかに, 任意の開被覆が星有限開被覆で細分されればパラコンパクトである（この性質を強パラコンパクトと言う）.
- 位相空間 X が**可算鎖条件**（countable chain condition）を満たすまたは **ccc 空間**であるとは, 素な開集合族が高々可算族であることを言う.
- 位相空間 X が**全体正規**（fully normal）であるとは, 任意の開被覆に対しそれから始まる開被覆からなる正規列が取れることを言う.

次の定理は基本的かつ有名かつ当然成り立って欲しいと願うものであるが, 証明は難しいことで知られている（ここでは主張を述べるに留める）:

定理 1.6 (A.H.Stone の定理)**.** 距離空間はパラコンパクト[*3]である.

ccc 空間については多くの興味深い性質があるが, 今はそれについては触れない. あくまで Lindelöf 空間との比較をしつつ, 少しだけその性質を述べるのみとする.
次の命題は, 証明は難しいのでここでは述べないが, 知っておくと幾つかの性質を直ちに導けるようになる：

命題 1.7. 正則空間がパラコンパクトであることと, 以下は同値である：

- 任意の開被覆が局所有限かつ σ 疎な開被覆で細分される.
- 任意の開被覆が閉包保存な開被覆で細分される.
- 全体正規.

以上に述べた定理から, Alexandroff-Urysohn の距離化定理は逆が成立することがわかる. すなわち距離空間には開被覆からなる正規列をなす展開列が存在する. さらにパラコンパクト空間の閉写像による連続像（閉像）がパラコンパクトであることもこれからただちに従う（閉包保存の特徴付けを用いる）.

フィルターの基本事項

フィルターについて述べておこう. 集合 X の部分集合族 $\mathcal{F}$ は, 次の 3 条件を満たすとき**フィルター**と呼ばれる：

- $\mathcal{F} \neq \emptyset, \emptyset \notin \mathcal{F}$.
- $F, G \in \mathcal{F}$ ならば $F \cap H \in \mathcal{F}$. これを $\mathcal{F}$ は**有限乗法的**という.
- $F \in \mathcal{F}, F \subset H$ ならば $H \in \mathcal{F}$.

二つ目の条件を緩めた, 次の条件が成立するとき, $\mathcal{F}$ は**有限交叉性を持つ**と言う：$F, G \in \mathcal{F}$ ならば $F \cap G \neq \emptyset$ である. これと一番初めの条件を満たすとき, $\mathcal{F}$ を**フィルターベース**という. フィルターベースから自然にフィルターが構成できることは明らかだろう. フィルターベース $\mathcal{F}$ に対して, それを含むフィルターの族から Zorn の補題を使って極大元をとることができる. これを**極大フィルター**という. 極大フィルターに関しては次が成り立つ：

命題 1.8. 集合 X の部分集合族 $\mathcal{F}$ が極大フィルターであることと, $\mathcal{F}$ はフィルターであって任意の $A \subset X$

[*3] 全体正規ならそんなに難しくない.

に対し $A \in \mathcal{F}$ または $X \setminus A \in \mathcal{F}$ となることは同値.

Proof. 極大フィルターとせよ. A も $X \setminus A$ も $\mathcal{F}$ の元でないとする. $A \cap F = \emptyset, (X \setminus A) \cap F' = \emptyset$ となる $F, F' \in \mathcal{F}$ があれば, $F \cap F' = \emptyset$ であるからこれは $\mathcal{F}$ の有限交叉性に反する. よって任意の F について $F \cap A \neq \emptyset$, または, 任意の F に対して $F \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$ となる. $F \cap A \neq \emptyset$ としてよい. このとき $\mathcal{F} \cup \{A\}$ は有限交叉性を持つのでこれにより生成される極大フィルター $\mathcal{F}'$ を考えれば, $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}'$ となる. すると $\mathcal{F}$ の極大性から $\mathcal{F} = \mathcal{F}'$ である.

逆に $\mathcal{F}$ が命題の条件を満たす極大でないフィルターとすれば, $A, X \setminus A \in \mathcal{F}$ なる $A \neq \emptyset$ があるがこれは有限交叉性に反する. □

フィルターは位相空間論において非常に便利な道具である. 点 x の近傍系はフィルターであり, 基本近傍系はフィルターベースである. フィルター（ベース）$\mathcal{F}$ は, ある点 x の（基本）近傍系を含むとき, x に**収束する**という. この用語のもとで, 次が従う：

命題 1.9. 位相空間 X がコンパクトであることは, 任意の極大フィルター $\mathcal{F}$ が収束することと同値.

Proof. $x \in \bigcap \overline{\mathcal{F}}$ がとれたとしよう. x の近傍 U を任意に取れば, 任意の $F \in \mathcal{F}$ に対し $U \cap F \neq \emptyset$. 従って $\mathcal{F} \cup \{U\}$ は有限交叉性を持つから, これにより生成される極大フィルターは $\mathcal{F}$ の極大性から $\mathcal{F}$ と一致する. よって $U \in \mathcal{F}$ である.

以上の考察によりわかることは, 極大フィルター $\mathcal{F}$ については $x \in \bigcap \overline{\mathcal{F}}$ がとれることと $\mathcal{F}$ が x に収束することは同値だということである. これから命題はただちに従う. □

この状況に名前をつけておく：

定義 1.10. フィルター $\mathcal{F}$ について, $\bigcap \overline{\mathcal{F}} \neq \emptyset$ であるとき**触点を持つ**という.

完全写像とコンパクト化

位相空間とその間の写像 $f : X \to Y$ は, 閉写像（つまり閉集合の像が閉集合）であり, さらにファイバー（一点の逆像）がコンパクトであるとき, **完全写像**（perfect map）と呼ばれる. 例えばコンパクト空間からハウスドルフ空間への連続写像は完全写像である.

容易にわかるが, 完全写像の制限はまた完全である. 合成が完全であることは次の命題からただちに従う：

命題 1.11. $f : X \to Y$ が完全写像で $K \subset Y$ がコンパクトなら, $f^{-1}(K)$ はコンパクトである.

Proof. $\mathcal{F}$ を $f^{-1}(K)$ の極大フィルターとすれば, $f(\mathcal{F})$ は K のフィルターベースなので, これはコンパクト性からある $y \in K$ に収束する. すると $\mathcal{F}$ の各元は $f^{-1}(y)$ と交わるので, $f^{-1}(y) \cap \mathcal{F}$ は $f^{-1}(y)$ の極大フィルターとなる. よってコンパクト性からある $x \in f^{-1}(y)$ に収束する. 以上より $\mathcal{F}$ の任意の元は x と交わることがわかった. 従って $\mathcal{F}$ は x に収束する. □

次にコンパクト化について述べよう. 完全正則空間についてのみ考える. 完全正則空間 X があるコンパクトハウスドルフ空間 Y に稠密に埋め込まれるとき, Y を X の**コンパクト化**という. $C(X, [0,1])$ を X から $[0,1]$ への連続写像全体とする. このとき X は $[0,1]^{C(X,[0,1])}$ へ $x \mapsto (f(x))_{f \in C(X,[0,1])}$ により埋め込まれる. $\beta X = \mathrm{Cl}_{[0,1]^{C(X,[0,1])}} X$ を X の **Stone-Čech コンパクト化**という. Stone-Čech コンパクト化に関しては次

が重要である：

命題 1.12. X を完全正則空間, Y をコンパクトハウスドルフ空間とし, $f : X \to Y$ を連続とする．このとき f は βX へ一意に拡張される．これを βf と書く．

Proof.（先に述べた議論と同様にして）Y はある $[0,1]^A$ に埋め込まれるので, この埋め込みを固定しておく．$I = [0,1]$ と置く．$\pi_a : I^A \to I$ を, 第 $a \in A$ 番目の座標を取り出す射影とする．$\pi_a f : X \to I$ なので, $g_a = \pi_a f$ なる $g_a \in C(X, I)$ が取れ, すると $\pi_{g_a} : I^{C(X,I)} \to I$ の βX への制限は明らかに g_a の βX への拡張となる．これを βg_a とおく．すると明らかに $\beta f = (\beta g_a)_{a \in A}$ は $f : X \to I^A$ の βX への拡張となる．あとは $\beta f(\beta X) \subset Y$ を示せば良いが, Y のコンパクト性より $\beta f(\beta X) \subset \mathrm{Cl}_{I^A} f(X) \subset \mathrm{Cl}_{I^A} Y = Y$ なのでこれも良い．以上で βf は $f : X \to Y$ の βX への拡張である． □

これから次がただちにわかる：

命題 1.13. αX を X のコンパクト化とすれば, X の点を動かさない全射 $\beta X \to \alpha X$ が存在する．

Proof. 恒等写像 $X \to X$ を拡張すれば良い．像はコンパクトなので αX と一致して全射となる． □

二つのコンパクト化 $\alpha X, \gamma X$ の間に X の点を動かさない全射 $\alpha X \to \gamma X$ が存在するとき $\alpha X \geq \gamma X$ と定めるとこれは X のコンパクト化全体に順序関係を定める（$=$ の成り立つときに同相となる）．この意味で βX は最も大きいコンパクト化である．コンパクト化により完全写像を特徴づけることができる：

命題 1.14. $f : X \to Y$ について, 以下は同値.

(1) f は完全写像.
(2) 任意のコンパクト化 αY に対し $\beta f(\beta X \setminus X) \subset \alpha Y \setminus Y$.
(3) あるコンパクト化 $\alpha X, \gamma Y$ と f の拡張 $\overline{f} : \alpha X \to \gamma Y$ があって $\overline{f}(\alpha X \setminus X) \subset \gamma Y \setminus Y$.

Proof. (2) なら (3) は明らか. (3) のとき $\overline{f}^{-1}(Y) = X$ なので $f = \overline{f}|_X$ の各一点逆像はコンパクトで, 閉写像の制限は閉写像だから f は完全.

(1) から (2) を導こう．$y \in \beta f(\beta X \setminus X) \cap Y$ が取れたとする．$y = \beta f(x)$ なる $x \in \beta X \setminus X$ を一つ取る．このとき $f^{-1}(y)$ は X のコンパクト集合なので βX で閉．βX は正規（とくに正則）なので, $f^{-1}(y) \subset U, x \notin \mathrm{Cl}_{\beta X} U$ となる βX の開集合 U がとれる．$F = X \setminus U$ と置くと, これは X の閉集合であるから $f(F)$ は Y の閉集合であって, $f^{-1}(y) \cap F = \emptyset$ なので $y \notin f(F)$ である.

さらに x の近傍を任意に取れば X と交わるが, $X \cap U$ のみと交わるもの V が取れれば, それは $x \notin \mathrm{Cl}_{\beta X} U = \mathrm{Cl}_{\beta X}(X \cap U) \supset \mathrm{Cl}_{\beta X}(X \cap V) = \mathrm{Cl}_{\beta X} V$ より V が x の近傍であることに矛盾である．従って $x \in \mathrm{Cl}_{\beta X} F$ がわかる．一方 βf は連続なので,

$$y = \beta f(x) \in \beta f(\mathrm{Cl}_{\beta X} F) \subset \mathrm{Cl}_{\alpha Y} f(F)$$

ここで $y \in Y$ であったから, これより $y \in Y \cap \mathrm{Cl}_{\alpha Y} f(F) = f(F)$. これは矛盾である． □

とくに id は完全写像なので, X を動かさない $f : \alpha X \to \gamma X$ があれば $f(\alpha X \setminus X) = \gamma X \setminus X$ となる.

完全写像の積は完全である．それを示すために閉写像に関して補題を用意する：

補題 1.15. $f : X \to Y$ が閉写像であるためには, 任意の $y \in Y$ と任意の近傍 $f^{-1}(y) \subset U$ に対し開集合 $y \in V$ があって $f^{-1}(y) \subset f^{-1}(V) \subset U$ となることが必要十分.

Proof. 必要であること．$X \setminus U$ は $f^{-1}(y)$ と交わらない閉集合なので, f が閉写像であることから, $f(X \setminus U)$ は y を含まない Y の閉集合．よってある開集合 $V \ni y$ があって $V \cap f(X \setminus U) = \emptyset$. このとき $f^{-1}(V) \cap (X \setminus U) = \emptyset$ なのでこの V が求める開集合.

十分であること．$F \subset X$ を閉とする．$f(F) \not\ni y$ を任意に取る．$F \cap f^{-1}(y) = \emptyset$ なので $f^{-1}(y) \subset (X \setminus F)$ である．$X \setminus F$ は開なので, 条件から開集合 $y \in V$ で $f^{-1}(V) \subset X \setminus F$ なるものがとれる．このとき $V \cap f(F) = \emptyset$ なので以上で $f(F)$ は閉となる． □

補題 1.16 (Wallace の定理, Tube Lemma の拡張)**.** $X_a, a \in A$ を位相空間の族, $F_a \subset X_a$ をコンパクトとし, $\prod_{a \in A} F_a \subset U$ なる $\prod_{a \in A} X_a$ の開集合 U を取る．このとき有限集合 $B \subset A$ と開近傍 $F_a \subset U_a$ があって, $\prod_{a \in B} U_a \times \prod_{a \in A \setminus B} X_a \subset U$ となる．

Proof. まず二つで示そう．X, Y を位相空間, F, H をコンパクト, $F \times H \subset W$ を開とする．各 $(s,t) \in F \times H$ に対して $(s,t) \in U(s,t) \times V(s,t) \subset U$ なる開集合をとると $U(s,t)$ らは $F \times H$ を被覆する．各 $s \in U$ について $U(s,t)$ らは $\{s\} \times H$ を被覆するので, 有限個の $t_i(s) \in H$ で $\{s\} \times H \subset \bigcup_i \{s\} \times V(s, t_i(s))$ となる. $U(s) = \bigcap_i U_i(s, t_i(s))$ と置くとこれは x の開近傍. $V(s) = \bigcup_i V(s, t_i(s))$ と置くとこれは H の開近傍. F のコンパクト性から有限個の $s_j \in F$ で $F \subset \bigcup_j U(s_j)$ とできる．$U = \bigcup_j U(s_j), V = \bigcap_j V(s_j)$ とおけばこれらは F, H の開近傍で, 明らかに $U \times V \subset W$ である.

以上から帰納的に任意有限個の場合に示された．一般の場合に示そう．各 $x = (x_a) \in \prod_{a \in A} F_a$ に対して有限集合 $A_x \subset A$ と開近傍 $x_a \in U_a(x), a \in A_x$ をとって $x \in \prod_{a \in A_x} U_a(x) \times \prod_{a \notin A_x} X_a \subset U$ とする．チコノフの定理より $\prod_{a \in A} F_a$ はコンパクトであるから, 有限個の $x(n) \in \prod_{a \in A} F_a$ で $\prod_{a \in A} F_a \subset \bigcup_n \left(\prod_{a \in A_{x(n)}} U_a(x(n)) \times \prod_{a \notin A_{x(n)}} X_a \right) \subset U$ とできる．$B = \bigcup_n A_{x(n)}$ と置く．これは有限集合．$a \notin A_{x(n)}$ のときには $U_a(x(n)) = X_a$ としよう．すると $\bigcup_n \left(\prod_{a \in A_{x(n)}} U_a(x(n)) \times \prod_{a \notin A_{x(n)}} X_a \right) = \left(\bigcup_n \prod_{a \in B} U_a(x(n)) \right) \times \prod_{a \notin B} X_a$. さて, 有限個の場合を適用し, 開集合 $F_a \subset V_a$ で $\prod_{a \in B} F_a \subset \prod_{a \in B} V_a \subset \bigcup_n \prod_{a \in B} U_a(x(n))$ なるものを取る．このとき $\prod_{a \in A} F_a \subset \left(\prod_{a \in B} V_a \right) \times \left(\prod_{a \notin B} X_a \right) \subset \left(\bigcup_n \prod_{a \in B} U_a(x(n)) \right) \times \prod_{a \notin B} X_a \subset U$ なので, V_a と B が求めるものである． □

以上の準備のもとで次は明らかである：

命題 1.17. X_a, Y_a を位相空間, $f_a : X_a \to Y_a$ を完全写像とすると, $(f_a) : \prod X_a \to \prod Y_a$ も完全写像である．

Proof. 各点の逆像がコンパクトであるのはチコノフの定理から従う．閉写像であることを示すのに上の補題を適用せよ． □

完全写像は位相空間の様々な性質を像や逆像へと継承する．完全写像による逆像のことを**完全逆像**という．容易に分かる一例として次をあげよう：

命題 1.18. (1) パラコンパクト空間の完全逆像はパラコンパクト．

(2) Lindelöf 空間の完全逆像は Lindelöf.

Proof. (1) と (2) は全く同じ手法で示せるが, 練習もかねて二つとも証明を書いておく．$f : X \to Y$ を完全, Y をパラコンパクトとする．$f(X)$ は Y の閉集合であるからパラコンパクト, 従って f は全射としてよい．X の開被覆 $\mathcal{U} = \{U_a : a \in A\}$ を任意にとる．各 $y \in Y$ について $f^{-1}(y)$ はコンパクトなので有限集合 $A_y \subset A$ をとって $f^{-1}(y) \subset \bigcup_{a \in A_y} U_a$ とできる．$\bigcup_{a \in A_y} U_a = W_y$ と置く．上の補題 1.15 より y の開近傍 V_y で $f^{-1}(V_y) \subset W_y$ なるものが取れる．$\{V_y : y \in Y\}$ の局所有限開被覆による 1:1 細分 $\{D_y : y \in Y\}$ を取ろ

う[*4]. すると $\{f^{-1}(D_y)\cap U_a : a\in A_y, y\in Y\}$ は $\mathcal{U}$ の細分となる開被覆である. $\{f^{-1}(D_y) : y\in Y\}$ は局所有限, 各 y に対して A_y は有限集合であることから局所有限であることが従う.

$f : X\to Y$ を完全, Y を Lindelöf とする. 補題 1.15 で y の開近傍 V_y を上のように取るところまで同じ. このとき Y は Lindelöf なので $\{V_y : y\in Y\}$ は可算部分被覆 $\{V_{y_i} : i\in \mathbf{N}\}$ を持つ. すると $\{U_a : a\in A_{y_i}, i\in\mathbf{N}\}$ が求める可算部分被覆である. □

以上, 少しまとまりがないが, この pdf を読むのに必要と思われる前提知識を足早に述べておいた.

2　他の空間との関連

可算性との比較

Lindelöf 空間は可算性のうちの一つである. まずは基本的な可算性として, 第二可算, 可分, ccc と Lindelöf の関連について見る.

命題 2.1. (1) 第二可算ならば Lindelöf である.
(2) 第二可算ならば可分である. 可分ならば c.c.c. を満たす.

Proof. (1) は任意の開被覆が与えられた開基の部分被覆により細分されることから自明である. (2) の前半は, 可算開基の各開集合から 1 点ずつとれば可算な稠密部分集合を得る. 後半は $\{U_i : i\in I\}$ を素な開集合族, A を可算稠密部分集合とすれば $\{A\cap U_i : i\in I\}$ が A の素な部分集合族であるので, A が可算集合であることから可算族となり I の可算性がわかる. □

逆が成り立たないような反例はいくつもあるが, 比較的簡単なものとしては次がある：$2^{2^{\mathbf{N}}}$ は第二可算でない可分な Lindelöf 空間である. $2^{2^{2^{\mathbf{N}}}}$ は可分でない Lindelöf 空間であり, 可算鎖条件を満たす[*5]. $\mathbf{S}$ を Sorgenfrey 直線とすれば, $\mathbf{S}\times\mathbf{S}$ は Lindelöf でない可分空間である. ただし Sorgenfrey 直線とは, $\mathbf{R}$ に $\{[a,b) : a<b\}$ を開基として位相を入れた空間のことである. 一方 $\mathbf{S}$ は Lindelöf である. なぜなら $\mathbf{S}$ の任意の開被覆は $\mathbf{R}$ の通常の開被覆により細分され, それは可算部分被覆をもつからである. $\mathbf{S}\times\mathbf{S}$ が Lindelöf でないことは, $\Delta=\{(x,-x) : x\in\mathbf{R}\}$ が非可算な離散閉部分空間だからである[*6]. その他の例については NAVER まとめなどにまとめられている.

上記の性質は距離空間においてはすべて同値である：

命題 2.2. 距離空間において, 第二可算, Lindelöf, 可分, ccc はすべて同値.

Proof. $B(x,r)$ により中心 x 半径 r の開球を表すとする. まず Lindelöf としよう. $\{B(x;1/n) : n\in\mathbf{N}\}$ の可算部分被覆を $\mathcal{B}_n$ とすれば $\bigcup_n \mathcal{B}_n$ は開基である. 可分としよう. A を可算稠密部分集合とすれば $\{B(a;1/n) :$

[*4] 開被覆 $\mathcal{U}$ が局所有限開被覆 $\mathcal{V}$ で細分されているとき, これは 1:1 細分となるようにとれる. $\{\bigcup\{V\in\mathcal{V} : V\subset U\} : U\in\mathcal{U}\}$ が局所有限な $\mathcal{U}$ の 1:1 細分である.

[*5] これらの証明を直接やろうとすると苦心するかもしれない. 可分性については Hewitt-Marczewski-Pondiczery の定理を適応すれば良い. ccc 空間については次の性質が知られている：ccc 空間の族 $X_i, i\in I$ に対し, 任意の有限集合 $J\subset I$ に対する $\prod_{j\in J} X_j$ が ccc 空間であれば $\prod_{i\in I} X_i$ もまた ccc 空間である. これは Δ システムレンマを使うことで容易に示せる.

[*6] 蛇足であるが, $\mathbf{S}\times\mathbf{S}$ は正規空間でない. これは $\mathbf{S}\times\mathbf{S}$ 上の連続関数と Δ 上の連続関数の個数を比較すれば良い. 可分であることから $\mathbf{S}\times\mathbf{S}$ 上の連続関数が高々 $\mathfrak{c}=2^{\aleph_0}$ 個しかないことがわかるが, 一方で X は濃度 $\mathfrak{c}$ の離散空間であるから Δ 上の連続関数は $2^{\mathfrak{c}}$ 個ある. もし $\mathbf{S}\times\mathbf{S}$ が正規なら Tietze の拡張定理により Δ 上の連続関数はすべて $\mathbf{S}\times\mathbf{S}$ に拡張されるのでその個数は $\mathfrak{c}$ 個以下でなければならない. これは矛盾である.

$a \in A, n \in \mathbf{B}\}$ は開基である．ccc としよう．$\{\mathcal{A}_n = \{B(x:1/n); x \in A_n \subset X\} : \mathcal{A}_n$は disjoint$\}$ の極大元を $\mathcal{B}_n$ とする（Zorn の補題を用いる）．ccc より A_n は可算．このとき $\bigcup_n A_n$ は可算な稠密部分集合である．□

さて, 以上では簡単な可算性との比較を見た．次にコンパクト性との関連を見よう．

コンパクト性, というかパラコンパクト性との関連

Lindelöf はある種のコンパクト性である．従ってその他多くのコンパクト性との強い関連があると期待される．ここでは特にパラコンパクトとの関連として二つの命題を述べる．

補題 2.3. 正則 Lindelöf 空間は正規である．

Proof. A, B を正則 Lindelöf 空間 X の閉集合とする． X は正則であるから, 任意の $a \in A$ に対し $a \in U(a), \overline{U(a)} \cap B = \emptyset$ なる開集合 $U(a)$ がとれ, B についても同じく $V(b)$ が取れる．A, B は Lindelöf であるからある可算個の $a_i \in A, b_i \in B, (i \in \mathbf{N})$ があり, $A \subset \bigcup_i U(a_i), B \subset \bigcup_i V(b_i)$ となる．ここで

$$U = U(a_1) \cup \left(\bigcup_{i=2}^{\infty} (U(a_i) - \bigcup_{j<i} \overline{V(b_j)}) \right)$$
$$V = \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} (V(b_i) - \bigcup_{j \le i} \overline{U(a_j)}) \right)$$

と置けばこれらは交わらない開集合であって A, B を分離する．□

命題 2.4 (森田の定理)**.** 正則 Lindelöf 空間 X は（強）パラコンパクトである．

Proof. まず X は正規である．正規空間について次の注意をしておこう：任意の開集合 $U \subset X$ に対し, 開部分集合 $V \subset U$ であって, $V = \bigcup_i U_i = \bigcup_i F_i, F_1 \subset U_1 \subset F_2 \subset U_2 \subset \cdots$ を満たす開集合 U_i と閉集合 F_i がとれるものが存在する．これは Urysohn の補題を使えばわかる．まず $x \in U$ を任意にとり, Urysohn の補題から $f(x) = 1, f(X \setminus U) = 0$ となる連続関数 f をとる．そして $V = f^{-1}((0,1]), U_i = f^{-1}((1/(i+1), 1]), F_i = f^{-1}([1/i, 1])$ とおけばこれらが求めるものである．このような V を**単調な集合**と名付けよう（ここだけの用語）．以上の考察により, X の任意の開被覆は単調な開集合からなる開被覆により細分されることがわかった．

任意に単調な開集合からなる被覆 $\mathcal{U}$ をとる．Lindelöf なので可算部分被覆 $\{U_i : i \in \mathbf{N}\}$ がとれる．上の条件を満たすように $U_i = \bigcup_j U_{ij} = \bigcup_j F_{ij}$ をとり, $V_i = \bigcup_{j \le i} U_{ji}, F_i = \bigcup_{j \le i} F_{ji}$ とおけばこれらは開集合と閉集合で $F_1 \subset V_1 \subset F_2 \subset V_2 \subset \cdots, \bigcup_i V_i = \bigcup_i F_i = X$ を満たす． $W_i = U_i \setminus F_{i-2}$ とおこう．ただし $F_{-1} = F_0 = \emptyset$ としている．このとき $\{W_i : i \in \mathbf{N}\}$ は開被覆であり, $|i-j| > 2$ なら $W_i \cap W_j = \emptyset$, つまり星有限である．さらに任意の W_i に対して $W_i \subset V_i = \bigcup_{j \le i} U_{ji}$ なので, $\{W_i\}$ と $\{U_i\}$ は準備の命題 1.2(2) の条件を満たし, よって $\mathcal{U}$ は星有限開被覆からなる細分を持つ．□

適当な可算性を課せば逆の成立が期待される．実際, 次が成り立つ；

命題 2.5. パラコンパクト ccc 空間は Lindelöf.

Proof. 任意の開被覆が局所有限開被覆で細分されるから, 任意の局所有限開被覆が可算部分被覆を持つことを示せば良い．実はより強く, ccc 空間において任意の局所可算な開集合族は高々可算族であることが成り立つので, これを示そう．

任意に開被覆 $\mathcal{U}$ をとる. 準備の命題 1.2(3) により $\mathcal{U}$ は星可算な開集合族 $\mathcal{V}$ で細分される. $V \in \mathcal{V}$ に対し, $\lambda_1(V) = \{U \in \mathcal{V} : U \cap V \neq \emptyset\}$ と置き, 帰納的に $\lambda_{k+1}(V) = \{U \in \mathcal{V} : \exists U' \in \lambda_k(V), U' \cap U \neq \emptyset\}$ と定める. このとき星可算性から $\lambda_1(V)$ は可算集合であり, 帰納的に $\lambda_k(V)$ も可算集合となる. $\lambda(V) = \bigcup_k \lambda_k(V)$ とおこう. これは可算集合である. さらに $\lambda(V) \cap \lambda(U) \neq \emptyset$ なら, ある k について $\lambda_k(V) \cap \lambda_k(U) \neq \emptyset$ であるから, このとき $U \in \lambda_{2k}(V)$ となり $\lambda(V) = \lambda(U)$ がわかる. 従って $\{\bigcup \lambda(V) : V \in \mathcal{V}\}$ は素な開集合族であるから, ccc 空間であることから可算族. よって $\{\lambda(V) : V \in \mathcal{V}\}$ も可算族となる. ところで $\mathcal{V} = \bigcup_{V \in \mathcal{V}} \lambda(V)$ であるが, 以上によりこの右辺は可算和であるから, 各 $\lambda(V)$ が可算であることから $\mathcal{V}$ は可算となる. □

これら二つの命題は, パラコンパクトの一般論で有名な次の定理を使うと, 正則空間の場合には簡単に示せる[*7]. ここでは証明はしない：

命題 2.6. 正則空間 X がパラコンパクトであるには, 任意の開被覆が σ 疎な開被覆で細分されることが必要十分.

次のセクションで命題 2.5 をハウスドルフの場合に少し拡張した命題を述べる.

さて, これまでは Lindelöf 空間が他の空間とどのように関連しているのかについて述べてきた. 次のセクションでは, Lindelöf 空間と同じような定義の空間を導入し, その性質をいくつか述べよう. 例えば, 可算コンパクトや擬コンパクトが, コンパクト空間自体をよく知るための一つの道具であるように, 次に述べる空間もそのような意味を持つ.

3 弱い Lindelöf 性

空間についてよく知るために, 少し条件を弱めたり強めたりした空間の振る舞いを調べる方法がある. Lindelöf 空間についても同じで, 少し条件を弱めた Lindelöf 空間の定義が幾つかある：

定義 3.1. X を位相空間とする.
任意の開被覆 $\mathcal{U}$ に対し, $\bigcup_{V \in \mathcal{V}} \overline{V} = X$ となる可算部分族 $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ がとれるとき, X を **almost Lindelöf** であるという.
任意の開被覆 $\mathcal{U}$ に対し, $\overline{\bigcup_{V \in \mathcal{V}} V} = X$ となる可算部分族 $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ がとれるとき, X を **weakly Lindelöf** であるという.

これらの定義から直ちに次のことがわかる：

命題 3.2. almost Lindelöf 空間は weakly Lindelöf 空間である.

命題 3.3. 正則 almost Lindelöf 空間は Lindelöf である.

Proof. 任意に開被覆 $\mathcal{U}$ をとる. 各 $U \in \mathcal{U}$ と各 $x \in U \in \mathcal{U}$ に対して正則性より $x \in V \subset \overline{V} \subset U$ なる開集合 V をとれば, この V 全体 $\mathcal{V}$ は開被覆. almost Lindelöf 空間なので $\bigcup \overline{\mathcal{V}'} = X$ なる可算部分族をとれば, 各 $\mathcal{V}'$ の元に対してそれを含む $\mathcal{U}$ の元を選ぶことでできる $\mathcal{U}$ の可算部分族が所望の性質を満たす. □

命題 3.4. X が almost（または weakly）Lindelöf であるとき, その連続像もまた almost（または weakly）Lindelöf である. とくに商空間もそれらの性質を保つ.

[*7] ただしこの定理の証明は割と大変.

Proof. 連続像の方でとった開被覆を戻して可算部分族をとって送れば良いだけである. □

Tube Lemma1.16 の簡単な応用で次がわかる：

命題 3.5. almost（または weakly）Lindelöf 空間とコンパクト空間の積空間はまた almost（または weakly）Lindelöf である.

Proof. X を almost Lindelöf, Y をコンパクトとする. $X \times Y$ の開被覆 $\mathcal{U}$ を任意にとる. これは $\mathcal{W} = \{W(\lambda) = U(\lambda) \times V(\lambda) : U(\lambda), V(\lambda)$ はそれぞれ X, Y の開集合, $\lambda \in \Lambda\}$ の形の開被覆で細分しておく. $\mathcal{W}_X = \{U(\lambda) : \lambda \in \Lambda\}, \mathcal{W}_Y = \{V(\lambda) : \lambda \in \Lambda\}$ と置く. $x \in X$ を任意にとると Y のコンパクト性から有限個の $V(\lambda_i(x)) \in \mathcal{V}_Y$ で $\{\{x\} \times V(\lambda_i(x)) : 1 \leq i \leq n(x)\}$ が $\{x\} \times Y$ の被覆となるものがとれる. $U(x) = \bigcap_i U(\lambda_i(x))$ と置く. このとき $U(x)$ は x の開近傍で, $\{U(x) \times V(\lambda_i(x)) : 1 \leq i \leq n(x), x \in X\}$ は $X \times Y$ の被覆であり, さらに $\mathcal{U}$ の細分である. $\mathcal{U}' = \{U(x) : x \in X\}$ と置こう. これは X の開被覆である. X は almost（または weakly）Lindelöf であるから, 可算個の $x_i \in X$ で $\bigcup\{\mathrm{Cl}_X U(x_i) : i \in \mathbb{N}\} = X$（または $\mathrm{Cl}_X(\bigcup\{U(x_i) : i \in \mathbb{N}\}) = X$）となるものがある. $U(x_i) \times V(\lambda_j(x_i))$ を含む $\mathcal{U}$ の元を一つ取り, $U(i,j)$ とする. $\mathcal{V} = \{U(i,j) : i \in \mathbb{N}, 1 \leq j \leq n(x_i)\}$ が求める可算部分被覆であることを示そう.

almost Lindelöf のとき. $(x,y) \in X \times Y$ をとれば, $x \in \mathrm{Cl}_X U(x_i)$ なる i と $y \in V(\lambda_j(x_i))$ なる j がとれる. このとき $(x,y) \in \mathrm{Cl}_X U(x_i) \times V(\lambda_j(x_i)) \subset \mathrm{Cl}_{X\times Y}(U(x_i) \times V(\lambda_j(x_i)) \subset \mathrm{Cl}_{X\times Y} U(i,j)$ である. 従って $X = \bigcup \mathrm{Cl}_{X\times Y}\mathcal{V}$ である.

weakly Lindelöf のとき. $(x,y) \in X \times Y$ を任意にとる. 開近傍 $x \in U', y \in V'$ を任意に取れば, $X = \mathrm{Cl}_X \bigcup\{U(x_i) : i \in \mathbb{N}\}$ なので $U \cap U(x_i) \neq \emptyset$ なる i がある. $y \in V(\lambda_j(x_i))$ なる j をとれば, $(U' \times V') \cap (U(x_i) \times V(\lambda_j(x_i))) \neq \emptyset$ である. 従って $(U' \times V') \cap (\bigcup\{U(i,j)\}_{ij}) \neq \emptyset$ となり, $X = \mathrm{Cl}_{X\times Y} \bigcup(\{U(i,j) : i,j\})$ がわかった. □

この二つの性質は閉部分空間に遺伝するとは限らないが, almost Lindelöf は開かつ閉部分空間へ, weakly Lindelöf は正則閉部分空間へ遺伝する（容易にわかるので証明は略す）. ただしここで A が正則な閉集合であるとは $A = \overline{\mathrm{Int}(A)}$ となることを意味する.

Sorgenfrey 直線の積 $\mathbf{S} \times \mathbf{S}$ は almost Lindelöf でない. これは $\{(x,-x) : x \in \mathbf{S}\}$ が開かつ閉であるが非可算離散空間であることよりわかる. 一方, $\mathbf{S} \times \mathbf{S}$ は weakly Lindelöf であることが以下を読んで行くとわかる.

先に述べたとおり, almost Lindelöf 空間は正則であれば Lindelöf なので, 名前の通りほとんど Lindelöf だという感じがある. 一方で weakly Lindelöf の方はそのような定理は成立しないが, 興味ある幾つかの性質が知られている. まずは次の命題である. これと Sorgenfrey 直線 $\mathbf{S}$ が可分であることから, $\mathbf{S} \times \mathbf{S}$ が weakly Lindelöf であるとわかる：

命題 3.6. ccc 空間は weakly Lindelöf 空間である.

一般に ccc 空間に対して次が成立する：

補題 3.7. 位相空間 X が ccc 空間であることと, 任意の開集合族 $\mathcal{U}$ に対し $\bigcup\mathcal{U} \subset \overline{\bigcup\mathcal{V}}$ なる可算部分族 $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ が取れることは同値である.

Proof. ccc でないときこれが成立しないことは明らかにわかる. これが成立しないとしよう. つまりある開被覆 $\mathcal{U}$ があって任意の可算部分族 $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ に対し $x \in \bigcup\mathcal{U} \setminus \overline{\bigcup\mathcal{V}}$ が取れるとする. 超限帰納法により X の開集合の素な非可算族を構成しよう.

$\mathcal{U}$ は非可算族である．$Y = \mathcal{U}$ と置く．まず $U_0 \in \mathcal{U}$ を適当にとる．$x_0 \in U_0$ と $x_1 \in Y \setminus \overline{U_0}$ を適当にとる．$\alpha < \omega_1$ に対し, 点 $\{x_\beta : \beta < \alpha\}$ と開集合族 $\{U_\beta : \beta < \alpha\}$ が次を満たすように取れているとしよう：任意の $\beta < \alpha$ に対し $x_\beta \notin \overline{\bigcup_{\gamma<\beta} U_\gamma}, x_\beta \in U_\beta$．このとき $\mathcal{U}$ の任意の可算部分族の和の閉包が Y を被覆しないことから, $x_\alpha \in Y \setminus \overline{\bigcup_{\gamma<\alpha} U_\gamma}$ が取れる．$x_\alpha \in U_\alpha \in \mathcal{U}$ なる U_α を取る．

さて, $\alpha < \omega_1$ に対して $O_\alpha = U_\alpha \setminus \overline{\bigcup_{\beta<\alpha} U_\beta}$ と置こう．これは $x_\alpha \in O_\alpha$ なので空でない開集合であって, 明らかに $\beta < \alpha$ に対して $O_\alpha \cap O_\beta = \emptyset$ である．従って $\{O_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ は開集合の素な非可算族である． □

この補題を使うと命題は容易に従う：

Proof. X を ccc 空間とする．開被覆 $\mathcal{U}$ を任意にとると, 補題より $X = \bigcup\mathcal{U} \subset \overline{\bigcup\mathcal{V}}$ なる可算部分族 $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ がとれるが, これは X が weakly Lindelöf であることを意味する． □

ccc かつパラコンパクトなら Lindelöf であったが, これは weakly Lindelöf の場合に一般化できる（ccc で証明するよりこちらの方が簡単かもしれない）：

命題 3.8. weakly Lindelöf パラコンパクトハウスドルフ空間 X は Lindelöf である．

Proof. X はパラコンパクトなので正規．よって正則. $\mathcal{U}$ を任意にとる．$\overline{V} \subset U \in \mathcal{U}$ となる開集合 V からなる開被覆 $\mathcal{V}$ をとる．パラコンパクトなので局所有限な開被覆による細分 $\mathcal{W}$ が取れる．weakly Lindelöf なので $\mathcal{W}$ の可算部分族 $\mathcal{U}'$ であって $X = \bigcup\mathcal{W} \subset \overline{\bigcup\mathcal{U}'}$ となるものが取れる．このとき $\overline{\mathcal{W}} < \overline{\mathcal{V}} < \overline{U}$ であるから $\overline{\mathcal{U}'} < \overline{U}$ である．さて, $\mathcal{U}'$ は局所有限なので（準備のところで述べたが）閉包保存. 従って $X = \overline{\bigcup\mathcal{U}'} = \bigcup\overline{\mathcal{U}'}$. よって $\mathcal{U}$ は可算被覆による細分 $\overline{\mathcal{U}'}$ を持つので Lindelöf である． □

以上, 特に weakly Lindelöf 空間をメインに, その簡単な性質を述べてきた．同じく Lindelöf 空間の場合には次が成り立つ：

- Lindelöf 空間の連続像は Lindelöf.
- Lindelöf 空間の閉部分空間は Lindelöf.
- Lindelöf 空間とコンパクト空間の積空間は Lindelöf.

これらは weakly Lindelöf などの場合よりも簡単に示せる．一方で, Lindelöf 空間と Lindelöf 空間の積空間は weakly Lindelöf にすらならない（この例は少し難しい．Hajnal と Juhász [7] 参照）．このように, Lindelöf という性質は積との相性が良くないと考えられる．これは同じコンパクト性であるパラコンパクトについても同じことが言える．すなわち二つのパラコンパクト空間の積は一般にパラコンパクトでない（Sorgenfrey 直線など）．

逆に, 積との相性の良い空間のクラスというものも存在する．例えば可分や第二可算なども有限積で閉じているが, 完備距離空間なども可算積で保たれる．完備距離空間を拡張した **Čech 完備**空間は積との相性が良く, Lindelöf やパラコンパクトに Čech 完備の条件を課すことで, 可算積で閉じたクラスとなることが知られていた．一方で Čech 完備は第二可算から導けない．第二可算公理はかなり強い位相的条件であると考えられるので, 第二可算公理から導くことのできないのは少し悲しい．こうして “諸々の条件を満足する良い空間のクラスは何か？” という方向性が生じてきたのであった．これは本講演のメインテーマでもある．まずはそのような方向への導入として, 次節で Čech 完備空間について述べよう．

4　良い空間のクラスを求めて 〜 Čech 完備

空間はすべて完全正則とする.

定義 4.1 (Čech 完備)**.** 位相空間 X が **Čech 完備**であるとは, Stone-Čech コンパクト化の中で G_δ 集合となることを言う. 同値であるが, $\beta X \setminus X$ が βX で F_σ となることを言う.

Čech 完備は Čech により 1937 年に導入された. まずは簡単な性質を見ていこう：

命題 4.2. 完全正則空間 X について次は同値である：

(1) Čech 完備.
(2) あるコンパクト化の中で G_δ.
(3) 任意のコンパクト化の中で G_δ.
(4) 任意のハウスドルフ拡張空間[*8]で G_δ.

Proof. (4)⇒(1),(2),(3) と, (3)⇒(2), (1) と, (1)⇒(2) は自明である.

(2)⇒(1), (1)⇒(3) は, cX を任意のコンパクト化とすると X の点を動かさない射影 $f : \beta X \to cX$ が完全であって $f(\beta X \setminus X) = cX \setminus X$ を満たす（命題 1.14 を見よ）ことと, コンパクト化の剰余（(2)⇒(1) では $cX \setminus X$, (1)⇒(3) では $\beta X \setminus X$）が F_σ となることからただちに従う.

(3)⇒(4) を示せば良い. Y を X の拡張空間とする. X は Y で稠密なので, βY は X のコンパクト化である. (3) より X は βY で G_δ だから Y でも G_δ である. □

命題 4.3. Čech 完備の閉集合, G_δ 集合はまた Čech 完備である.

Proof. X を Čech 完備, A をその閉集合または G_δ とする. $\mathrm{Cl}_{\beta X} A$ で A が G_δ であればよい. X は Čech 完備なので βX の開集合 W_n で $X = \bigcap_n W_n$ なるものがとれる.

A が閉集合のとき, $A = X \cap \mathrm{Cl}_{\beta X} A = \bigcap_n (W_n \mathrm{Cl}_{\beta X} A)$ なので良い.

A が G_δ のとき, $A = \bigcap_n U_n$ なる X の開集合 U_n をとり, $U_n = X \cap V_n$ なる βX の開集合 V_n を取れば, $A = \bigcap_n (W_n \cap V_n) = \bigcap_n (W_n \cap V_n \cap \mathrm{Cl}_{\beta X} A)$ となる. □

命題 4.4. Čech 完備空間可算個の積空間は Čech 完備である.

Proof. X_n を Čech 完備とし, βX_n の中で開集合 W_{nm} により $X_n = \bigcap_m W_{nm}$ と表されるとする. このとき $\prod_n X_n$ はそのコンパクト化 $\prod_n \beta X_n$ の中で $\prod_n X_n = \bigcap_{m,k} \prod_{n \le k} W_{nm} \times \prod_{n>k} \beta X_n$ と表される. □

命題 4.5. Čech 完備空間の完全像と完全逆像はそれぞれ Čech 完備である.

Proof. $f : X \to Y$ を全射完全写像, X を Čech 完備とする. このとき f は一意に $\overline{f} : \beta X \to \beta Y$ へと拡張され, 命題 1.14 より $\overline{f}(\beta X \setminus X) = \beta Y \setminus Y$ である. すると $\beta X \setminus X$ は F_σ であるから $\beta Y \setminus Y$ も F_σ となって Y は Čech 完備.

$f : X \to Y$ を完全写像, Y を Čech 完備とする. $f(X)$ は Y で閉であるから $f(X)$ も Čech 完備. よって f は全射としてよい. するとやはり先と同じく $\overline{f}(\beta X \setminus X) = \beta Y \setminus Y$ であるから, $\beta Y \setminus Y$ が F_σ であることか

[*8] X を稠密部分集合として含むハウスドルフ空間

ら $\beta X \setminus X$ も F_σ とわかる. □

Čech 完備の定義は X 以外の位相により為されていたが, これを X の位相のみによって特徴付けるために次の用語を定義する：

定義 4.6. X を位相空間, $\Gamma = \{\mathcal{U}_n : n \in \mathbf{N}\}$ を開被覆の族, $\mathcal{F}$ をフィルターとする. このとき $\mathcal{F}$ が Γ に**支配される**（dominated）とは, 任意の n について $F_n \subset U_n$ となる $F_n \in \mathcal{F}, U_n \in \mathcal{U}_n$ が存在することを言う. さらに, Γ に支配される任意のフィルターが触点を持つ（定義 1.10 を参照）とき, Γ を**完備列**（complete sequence）という.

命題 4.7. Čech 完備であるためには, 完備列が存在することが必要十分.

Proof. X を Čech 完備とする. W_n を βX の開集合であって $\bigcap_n W_n = X$ とする. 各 x に対して $\mathrm{Cl}_{\beta X} W_n(x) \subset W_n$ なる開近傍 $x \in W_n(x)$ を取って $\mathcal{U}_n = \{W_n(x) \cap X : x \in X\}$ と置く. この $\Gamma = \{\mathcal{U}_n\}_n$ が完備列であることを示そう. $\mathcal{F}$ を Γ に支配されるフィルターとする. $F_n \in \mathcal{F}, F_n \subset W_n(x_n) \in \mathcal{U}_n$ を一つずつとる. βX はコンパクトなので $y \in \bigcap \mathrm{Cl}_{\beta X}\mathcal{F}$ がとれる. すると $y \in \bigcap \mathrm{Cl}_{\beta X}\mathcal{F} \subset \bigcup_n \mathrm{Cl}_{\beta X}(F_n) \subset \mathrm{Cl}_{\beta X}(W_n(x_n)) \subset \bigcap_n W_n = X$ であるから, $y \in \bigcap(\mathrm{Cl}_{\beta X}\mathcal{F} \cap X) = \bigcap \mathrm{Cl}_X \mathcal{F}$ となって y は $\mathcal{F}$ の触点.

逆に完備列 $\Gamma = \{\mathcal{U}_n\}_n$ があるとき. 各 $U \in \mathcal{U}_n$ に対して $U = U' \cap X$ なる βX の開集合 U' を一つ取り, $W_n = \bigcup\{U' : U \in \mathcal{U}_n\}$ と置く. $x \in (\bigcap_n W_n) \setminus X$ が取れたとしよう. x の近傍系を $\mathcal{V}_x$ と置いて $\mathcal{F} = \mathcal{V}_x \cap X$ とする. $x \in \beta X$ なのでこの各元は $\emptyset$ でなく, 従って X のフィルターとなる. さらに各 n について $x \in U'_n$ なる $U_n \in \mathcal{U}_n$ がとれて $\mathcal{U}_n \ni U_n \supset U'_n \cap X \in \mathcal{F}$ となり, $\mathcal{F}$ は Γ に支配される. よって $\mathcal{F}$ は触点を持つ. 一方 βX はハウスドルフで $\mathcal{V}_x$ は $x \notin X$ の近傍系なので $\{x\} = \bigcap \mathrm{Cl}_{\beta X}\mathcal{V}_x \supset \bigcap \mathrm{Cl}_{\beta X}\mathcal{F} \supset \bigcap \mathrm{Cl}_X\mathcal{F}$. そして $\bigcap \mathrm{Cl}_X \mathcal{F} \subset X \cap \{x\} = \emptyset$ であるから, これはすなわち $\mathcal{F}$ は触点を持たないことを意味する. よって矛盾である. □

このような, 他の空間の位相により定められた空間をその空間自身の位相のみで特徴付ける態度は重要である. これによって Čech 完備を定義しても良いのだが, そのような定義を**内包的**定義という.

さて, Čech 完備の内包的定義をもちいて幾つかの定理を示そう. 次は Čech 完備が完備の名を関する理由とも考えられる重要な定理である：

定理 4.8. 距離空間が完備距離づけ可能であることと Čech 完備であることは同値.

Proof. (X, d) を距離空間とする. まず d が完備であれば $\{\mathcal{U}_n = \{B(x : 1/n) : x \in X\} : n \in \mathbf{N}\}$ が完備列であることは d の完備性から明らかである. Čech 完備としよう. 完備列 $\{\mathcal{U}_n\}_n$ をとる. さらに X は距離空間なので正規列を成す展開列 $\mathcal{W}_n$ が存在し, 適当な細分をとることで ${\mathcal{W}_n}^\Delta < \mathcal{U}_n$ として良い. ゲージ化補題 1.3 により $\{\mathcal{W}_n\}_n$ に沿う擬距離 d を取る. $\mathcal{W}_n$ は正規列を成す展開列であるから, Alexandroff - Urysohn の定理から d は位相の合致する距離である. 完備であることを示すために Cauchy 列 x_n を取ろう. 適当に部分列を取ることで $d(x_n, x_m) < \max\{1/2^n, 1/2^m\}$ として良い. ここで $F_n = \{x_m : m \geq n\}$ と置けば, $F_n \subset B(x_n : 1/2^n)$ なので $F_n \subset U_n$ なる $U_n \in \mathcal{U}_n$ がとれる. $\{F_n\}_n$ は X のフィルターベースなので, 極大フィルター $\mathcal{F}$ を生成するが, これは完備列 $\mathcal{U}_n$ で支配されているので触点 x を持ち, 明らかに $x_n \to x$ である. □

さて, これまで Čech 完備空間の簡単な性質についてざっと述べてきた. 次に, 今回のテーマと関連する重要な命題を述べよう. これは Čech 完備空間の顕著な性質として 1960 年に Frolík により見出された. そして, 一

般化距離空間という位相空間論の一つの方向性を示す重要な命題となるのであった．それについて述べるために，Čech 完備空間の興味深い特徴づけを示しておこう：

命題 4.9 (Frolík)**.** X を完全正則空間とする．

- X が Čech 完備パラコンパクトであることと完備距離空間の完全逆像であることは同値．
- X が Čech 完備 Lindelöf であることと可分完備距離空間の完全逆像であることは同値．

Proof. すでに示した通り Čech 完備もパラコンパクトも Lindelöf も完全逆像へ継承するので，X が（可分）完備距離空間の完全逆像であれば Čech 完備パラコンパクト（Lindelöf）であることは良い．

X を Čech 完備パラコンパクトであるとしよう．このとき X には完備列 $\Gamma = \{U_n\}$ があって，さらに正規列 $\{W_n\}$ が ${\mathcal{W}_n}^{\Delta} < \mathcal{U}_n$ を満たすようにとれる．この正規列に沿う擬距離 d をとり，商空間 $Y = X/d$ を考えよ．商写像 $f : X \to X/d$ が完全であることを示そう．

$y \in Y$ を取り，y の近傍系を $\mathcal{V}_y$ とする．このとき射影 f の定義から $\mathcal{U}_n$ のある元は $f^{-1}(\mathcal{V}_y)$ に含まれているから，Čech 完備の内包的定義により $f^{-1}(\mathcal{V}_y)$ は触点 x を持つ．このとき $f(x) \in f(\bigcap \overline{f^{-1}(\mathcal{V}_y)}) \subset f(f^{-1}(\bigcap \overline{\mathcal{V}_y})) = \{y\}$ なので触点は $f^{-1}(y)$ の元である．さて，$f^{-1}(y)$ の任意のフィルター $\mathcal{V}$ をとれば，これにより生成される X のフィルターはすべて $f^{-1}(\mathcal{V}_y)$ を含むから先の考察により $f^{-1}(y)$ に触点を持ち，従って $f^{-1}(y)$ の任意のフィルターが $f^{-1}(y)$ に触点を持つことがわかった．これは $f^{-1}(y)$ がコンパクトであることを示している．

次に閉集合 $F \subset X$ を任意に取って $y \in \mathrm{Cl}_Y f(F)$ とし，$\mathcal{V}_y$ を y の近傍系とする．$f^{-1}(\mathcal{V}_y) \cap F$ は F のフィルターであるが，これは先の考察により触点を持つ．一方 F は閉なのでその触点は F の元．よって $y \in f(F)$ となって $f(F)$ が閉であることがわかる．

以上より射影 f が完全であることがわかった．すると Čech 完備が完全像へ継承することから $Y = X/d$ は Čech 完備となり，従って命題 4.8 より Y は完備距離空間．とくに Lindelöf であればこれは可分完備距離空間となる．以上で定理が示された．□

この定理の簡単な適用として次が示される：

定理 4.10 (Nagata)**.** 完全正則空間 X が Čech 完備パラコンパクト（Čech 完備 Lindelöf）であるための必要十分条件は，X が（可分）完備距離空間とコンパクトハウスドルフ空間の直積の閉集合として埋め込まれることである．

Proof. 十分性は（可分）完備距離空間とコンパクトハウスドルフ空間が Čech 完備パラコンパクト（Lindelöf）であって Čech 完備パラコンパクト（Lindelöf）が閉集合へ継承することから明らかである．必要性を示すために Frolík の定理 4.9 により（可分）完備距離空間 Y への完全写像 f をとる．$g : X \to \beta X$ を埋め込みとすれば，f, g はともに完全写像であるから $(f, g) : X \to \beta X \times Y$ は 1:1 の完全写像．すなわちこれが求める埋め込みである．□

次は，以上の準備のもとでは簡単であるが，今回のテーマと繋がる重要な命題である：

定理 4.11. X_n を可算個の Čech 完備パラコンパクト (Čech 完備 Lindelöf) 空間の族とする．このとき $\prod_n X_n$ も Čech 完備パラコンパクト (Čech 完備 Lindelöf) となる．

Proof. $f_n : X_n \to Y_n$ を Čech 完備パラコンパクト（Čech 完備 Lindelöf）空間から（可分）完備距離空間へ

の完全写像の族とすれば, (f_n) は完全写像であって, $\prod_n Y_n$ もまた（可分）完備距離空間なので, 従って上の命題 4.9 より定理が従う. □

さて, このセクションでは Čech 完備の性質を見てきたが, それは一般化距離空間や可算乗法的空間族へと至るきっかけとなった定理 4.11 を述べるためである. Čech 完備を課すことにより, パラコンパクトや Lindelöf の弱みであった積に対する性質が救われたわけであるが, しかし Čech 完備（さらに言うと Čech 完備 Lindelöf）という条件は第二可算から出てこない. つまり Čech 完備 Lindelöf でない第二可算空間がある：$\mathbf{Q}$ は距離空間であるから, $\mathbf{Q}$ が Čech 完備であるなら完備距離化可能でなければならないが, よく知られているように, Baire の範疇定理を適用して $\mathbf{Q}$ は完備距離化可能でないことがわかる[*9]. 一方 $\mathbf{Q}$ は可算なので第二可算である.

第二可算公理は非常に強い位相的条件と考えられるので, Čech 完備 Lindelöf が第二可算から出ないのは少しもどかしい. そこで第二可算と Čech 完備を含んだ空間のクラスであって, パラコンパクトや Lindelöf と合わせて乗法が保たれるような空間のクラスを求めたくなる. それが次に述べる Arhangel'skiĭの p 空間である.

5　良い空間のクラスを求めて 〜 p 空間

定義 5.1 (p 空間)**.** 完全正則空間 Y が X の拡張空間であるとする. Y の開集合族の列 $\{\mathcal{U}_i\}$ が, X の Y における**外延的** p **構造**または単に p **構造**であるとは, 任意の $x \in X$ に対し $x \in \bigcap_i \mathrm{St}(x, \mathcal{U}_i) \subset X$ なることを言う.

完全正則空間 X が p **空間**であるとは, βX において p 構造を持つことを言う.

この定義はあきらかに Čech 完備空間を拡張したものである. Čech 完備でやったことと同じような特徴づけを p 空間でも行ってみよう. そののち, Čech 完備と同じ流れでその特徴を述べていく.

命題 5.2. 完全正則空間 X において次は同値.

(1) X は p 空間である.
(2) X はあるコンパクト化において p 構造を持つ.
(3) X は任意のコンパクト化において p 構造を持つ.
(4) X は任意のハウスドルフ拡張空間において p 構造を持つ.

Proof. (4)⇒(1),(2),(3) と (3)⇒(2),(1) と (1)⇒(2) は自明. (3)⇒(4) は Čech 完備のときと全く同じ理由である. Čech 完備のときとほとんど同じであるが, (2)⇒(1) を示そう. bX をコンパクト化とする. X を動かさない全射 $f : \beta X \to bX$ があって $f(\beta X \setminus X) = bX \setminus X$ となる. $\mathcal{U}_i$ を bX での p 構造とし, $\mathcal{W}_i = \{\beta X \setminus f^{-1}(bX \setminus U) : U \in \mathcal{U}_i\}$ と置く. $\mathcal{W}_i$ が βX での p 構造を与えていることを示そう. $y \in (\bigcap_i \mathrm{St}(x, \mathcal{W}_i)) \setminus X$ が取れるような $x \in X$ があるとする. このとき $f(y) \notin X$ である. $\{x, y\} \subset W_i \in \mathcal{W}_i$ と $W_i = \beta X \setminus f^{-1}(bX \setminus U_i)$ なる $U_i \in \mathcal{U}_i$ をとれば, $f(x) \in X \cap U_i, f(y) \in U_i$ であるから, $f(y) \in \bigcap_i U_i \subset \bigcap_i \mathrm{St}(f(x), \mathcal{U}_i) \subset X$ となって矛盾である.

(1)⇒(3) も同じである. (2)⇒(1) では引き戻したのを, 今度は送れば良い. □

命題 5.3. p 空間の閉集合は p 空間.

Proof. X を p 空間, A を閉集合, $\mathcal{U}_i$ を βX での p 構造とすると, $\mathcal{U}_i \cap \mathrm{Cl}_{\beta X} A$ は明らかに $\mathrm{Cl}_{\beta X} A$ での A の p

[*9] 実は Baire の範疇定理は Čech 完備空間において成立する.

構造である． □

命題 5.4. p 空間可算個の積空間は p 空間である．

Proof. X_n を p 空間, $\mathcal{U}_{ni}, i = 1, 2, \cdots$ を X_n の βX_n での p 構造とする．$\mathcal{V}_n = \{\prod_{i \leq n} U_i \times \prod_{i > n} \beta X_n : U_i \in \mathcal{U}_{in}, i \leq n\}$ が $\prod X_n$ の $\prod \beta X_n$ での p 構造となることを示そう．$x = (x_n) \in \prod X_n$ を任意に取る．各 $\mathcal{U}_{ni}$ は p 構造なので, $\bigcap_i \mathrm{St}(x_n, \mathcal{U}_{ni}) \subset X_n$ である．$(y_n) \in \bigcap_n \mathrm{St}(x, \mathcal{V}_n)$ を取ろう．このとき各 y_n は $\bigcap_n \mathrm{St}(x_n, \mathcal{U}_{ni})$ に含まれるので X_n の元．よって $\bigcap_n \mathrm{St}(x, \mathcal{V}_n) \subset \prod X_n$ となって, 以上で示された． □

命題 5.5. p 空間の完全逆像はまた p 空間である．

Proof. $f : X \to Y$ を完全写像（これは全射としてよい）, Y を p 空間とし, $\mathcal{V}_n$ を Y の βY での p 構造とすると, $\beta f^{-1}(\mathcal{U}_n)$ が X の βX での p 構造となることは $\beta f(\beta X \setminus X) = \beta Y \setminus Y$ からわかる． □

Čech 完備は完全像へ継承したので, p 空間も完全像へ継承してほしいが, 一般にそれは成り立たない（Worrell の例 [10] や J. Chaber による [3] 参照）．しかし（難しいのでここでは示さないが）パラコンパクトなら成り立つ：

命題 5.6. パラコンパクト p 空間の完全像はパラコンパクト p 空間である．同じく Lindelöf p 空間の完全像は Lindelöf p 空間である．

p 空間の定義は Čech 完備のときと同じように外延的になされている．今度は p 空間の内包的特徴付けをしよう．そのために少し言葉の定義をする：

定義 5.7 (ネットワーク)**.** X を位相空間, $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ を部分集合の族とする．任意の $B \in \mathcal{B}$ とその任意の開近傍 $B \subset U$ に対し, $B \subset A \subset U$ なる $A \in \mathcal{A}$ が存在するとき, $\mathcal{A}$ を $\mathcal{B}$ に関する**ネットワーク**と言う．$\{\{x\} : x \in X\}$ に関するネットワークを単にネットワークと言う．$\mathcal{A} = \{A\}$ のときには単に A に関するネットワークなどという．

例えば $\{\{x\} : x \in X\}$ はネットワークであり, 任意の開基はネットワークである．逆に開集合からなるネットワークは開基である．この定義のもとで内包的定義を行おう：

定理 5.8 (Burke)**.** 完全正則空間 X が p 空間であるためには, 次が必要十分：以下を満たす開被覆の列 $\mathcal{U}_n$ が存在する．各 n に対して $x \in U_n \in \mathcal{U}_n$ となっているとき,

(1) $\bigcap_n \overline{U_n}$ はコンパクト．
(2) $\{\bigcap_{i \leq n} \overline{U_i} : n \in \mathbf{N}\}$ は $\bigcap_n \overline{U_n}$ に関するネットワークである．言い換えると, $\bigcap_n \overline{U_n}$ の任意の近傍はある $\bigcap_{i \leq n} \overline{U_i}$ を含む．

このような $\mathcal{U}_n$ を**内包的 p 構造**という．

Proof. X が p 空間のとき． $\mathcal{V}_n$ を βX における p 構造とする． βX の開集合族 $\mathcal{W}_n$ を, $\mathcal{W}_n < \mathcal{V}_n, \mathrm{Cl}_{\beta X}(\mathcal{W}_{n+1}) < \mathcal{W}_n, X \subset \bigcup \mathcal{W}_n$ となるようにとる．$\mathcal{U}_n = \mathcal{W}_n \cap X$ と置けば, これが求めるものである．まず (1) を確かめるために, $x \in U_n \in \mathcal{U}_n$ となっているとして, $U_n = W_n \cap X$ となる $W_n \in \mathcal{W}_n$ をとる．このとき $\mathrm{Cl}_{\beta X} W_{n+1} \subset \mathrm{St}(x, \mathcal{W}_n)$ であるから, $\bigcap_n \mathrm{Cl}_X U_n = \bigcap_n (X \cap \mathrm{Cl}_{\beta X} W_n) \subset X \cap \bigcap_n \mathrm{St}(x, \mathcal{W}_n)$. ここで $\mathcal{V}_n$ が X の βX での p 構造で, $\mathcal{W}_n < \mathcal{V}_n$ だから $\bigcap_n \mathrm{St}(x, \mathcal{W}_n) \subset X$. よって $\bigcap_n \mathrm{Cl}_X U_n =$

$\bigcap_n(X \cap \mathrm{Cl}_{\beta X} W_n) = \bigcap_n \mathrm{Cl}_{\beta X} W_n$ となり，これはコンパクト．(2) を示そう．$\bigcap_n \mathrm{Cl}_X U_n$ の X での任意の開近傍 U をとる．$U = W \cap X$ なる βX での開集合 W がある（これは βX での近傍である）．すべての n で $(\bigcap_{i \leq n} \mathrm{Cl}_{\beta X} W_i) \setminus W \neq \emptyset$ となるとすれば，ここから x_n をとることで $\beta X \setminus W$ の点列 (x_n) を得るが，$\beta X \setminus W$ はコンパクトゆえ閉．従って x_n の集積点 x は W に含まれない $\bigcap_n \mathrm{Cl}_{\beta X} W_n$ の点．この x の存在は W が $\bigcap_n \mathrm{Cl}_X U_n = \bigcap_n \mathrm{Cl}_{\beta X} W_n$ の近傍であることに反する．以上で示された．

逆に内包的 p 構造 $\mathcal{U}_n = \{U_a : a \in A_n\}$ があるとしよう．$U_a = V_a \cap X$ となる βX における開集合 V_a をとって，$\mathcal{V}_n = \{V_a : a \in A_n\}$ らが βX における p 構造である．まず $\mathcal{V}_n$ は X を被覆することに注意する．もし p 構造でないならば，ある $x \in X$ があって $y \in (\bigcap_n \mathrm{St}(x, \mathcal{V}_n)) \setminus X$ がとれる．すると各 n について $\{x, y\} \subset V_n \in \mathcal{U}_n$ となる V_n がとれる．$U_n = V_n \cap X$ と置こう．これは $\mathcal{U}_n$ の元である．(1) より $K = \bigcap_n \mathrm{Cl}_X U_n$ はコンパクト．しかも $y \notin X \supset K$ であるから，y の開近傍 W をとって $K \cap \mathrm{Cl}_{\beta X} W = \emptyset$ とできる．$\beta X \setminus \mathrm{Cl}_{\beta X} W$ は K を含む開集合なので，(2) より $\bigcap_{i \leq n} \mathrm{Cl}_X U_i \subset \beta X \setminus \mathrm{Cl}_{\beta X} W$ となる n がとれる．$G = W \cap (\bigcap_{i \leq n} V_i)$ と置けば，V_i も W も y を含む開集合だったので，G は y の開近傍．すると X は βX で稠密だから $G \cap X \neq \emptyset$. 一方，

$$G \cap X \subset (\bigcap_{i \leq n} V_i) \cap X = \bigcap_{i \leq n} U_i \subset \beta X \setminus \mathrm{Cl}_{\beta X} W \subset X \setminus W \subset X \setminus G$$

なので $G \cap X = \emptyset$. これは矛盾．□

この内包的定義を用いて，Čech 完備のときの定理 4.9 と同じように p 空間を特徴付けよう：

定理 5.9 (Arhangel'skiĭ)**.** X を完全正則空間とする．

- X がパラコンパクト p 空間であることと距離空間の完全逆像であることは同値.
- X が Lindelöf p 空間であることと可分距離空間の完全逆像であることは同値.

Proof. Lindelöf が完全像と完全逆像へうつることから上だけ示せば十分．さらにパラコンパクトと p 空間は完全逆像へ継承することから，パラコンパクト p 空間であるときに距離空間の完全逆像となることを示せば良い．

$\mathcal{U}_n$ を X の p 構造とする．パラコンパクトなのでスター細分が取れて，従って $\mathcal{V}_n < \mathcal{U}_n, {\mathcal{V}_{n+1}}^* < \mathcal{V}_n$ となる列 $\mathcal{V}_n$ がとれる．これは内包的 p 構造を成す正規列．この正規列に沿う擬距離 d をとって，距離空間 X/d への標準全射 $f : X \to X/d = Y$ をとる．これが完全であることを言えば良い．$\mathcal{V}_n$ は正規列なので $\overline{\mathcal{V}_{n+1}} < \mathcal{V}_n$ であり，擬距離の取り方から $f^{-1}(f(x)) = \bigcap_i \mathrm{St}(x, \mathcal{V}_n)$ であるが，これは定理 5.8(1) よりコンパクト．よって f が閉写像であることを示せば良い．

$F \subset X$ を閉集合として，$y \in Y \setminus f(F)$ をとる．$f^{-1}(y) \cap F = \emptyset$ である．$f(x) = y$ となる $x \in X$ をとれば $f^{-1}(y) = \bigcap_i \mathrm{St}(x, \mathcal{V}_n)$ あるが，定理 5.8(2) より，ある n により $f^{-1}(y) \subset \mathrm{St}(x, \mathcal{V}_n) \subset X \setminus F$ となる．従って擬距離 d の取り方から，$d(f^{-1}(y), F) \geq 1/(n+1) > 0$ がわかる．よって $d(y, f(F)) > 1/(n+1)$ となって $f(F)$ は閉．□

Čech 完備のときと全く同じ方法で定理 5.9 を適用することで，長田の定理 4.10 や定理 4.11 に相当する定理を得る：

定理 5.10 (Nagata)**.** 空間 X がパラコンパクト p（Lindelöf p）空間であるための必要十分条件は，X が（可分）距離空間とコンパクトハウスドルフ空間の直積の閉集合として埋め込まれることである．

定理 5.11. X_n を可算個のパラコンパクト p（Lindelöf p）空間の族とする．このとき $\prod X_n$ もパラコンパクト p（Lindelöf p）空間である．

また定理 5.9 より, 任意の第二可算空間, もっと言えば, 任意の距離空間が p 空間であることがわかる[*10].

さて, 今までに述べた p 空間のクラスに関する性質をまとめてみよう.

- 閉集合と完全逆像へ継承し, 可算積で閉じる.
- コンパクト空間と第二可算空間を含む.
- 完全像へは継承しないが, パラコンパクトを課せば完全像へ継承する.

とくに Lindelöf p 空間はこれらを満たす．第二可算も含んでいて, Lindelöf p 空間はまさに我々の求めていた空間そのものである．実は, この事実はある意味で逆に該当することが成り立つ：

定理 5.12.
- コンパクト空間と距離空間を含み, 閉集合へ継承し, 有限積で閉じた空間のクラスうち最小のクラスは, パラコンパクト p 空間である.
- コンパクト空間と第二可算空間を含み, 閉集合へ継承し, 有限積で閉じた空間のクラスうち最小のクラスは, Lindelöf p 空間である.

Proof. 一つめと全く同じく二つ目が示せる．$\mathbf{D}$ を求めるクラスとする．パラコンパクト p 空間のクラスを $\mathbf{Pp}$ と置く．$\mathbf{Pp}$ はこれらの性質を満たすので, $\mathbf{D}$ の最小性から $\mathbf{D} \subset \mathbf{Pp}$ である．逆に長田の定理 5.10 より, 任意の $X \in \mathbf{Pp}$ はあるコンパクト空間と距離空間の積の閉集合とみなせるが, コンパクト空間と距離空間の積空間の閉集合は $\mathbf{D}$ の元であるから, $X \in \mathbf{D}$ である． □

以上では p 空間の強みである積に注目してその性質を見てきた．そして我々の求めていた良い空間のクラスの一つとして, Lindelöf p 空間を得たのであった．一方 p 空間は完全像へ継承しない．これは p 空間が像へ継承しにくいということを示唆している．Lindelöf やパラコンパクトは p 空間よりは像へと継承しやすく, すなわち Lindelöf は連続像へ継承し, パラコンパクトは閉像へ継承する空間であった．こうしてパラコンパクトや Lindelöf と p 空間をあわせることで完全像へ継承するようになる．これはパラコンパクトや Lindelöf の効力であるように思える．

また, パラコンパクト p 空間の閉像であって p 空間でないものや, Lindelöf p 空間の連続像であって p 空間でないものが存在する．そこでもう少し贅沢をして, Lindelöf 空間の部分クラスであって, コンパクトと第二可算を含み, 閉部分集合と連続像へ継承し, 可算積で閉じたものを求めたいと思うのは自然なことだろう．次節ではこれらの欲望を満たす空間について述べよう．

6　良い空間のクラスを求めて ～ Lindelöf Σ 空間

Σ 空間の定義を述べるために, 少しだけ記号の定義をしよう．X の集合族 $\mathcal{A}$ と $B \subset X$ に対して

$$C(B, \mathcal{A}) = \bigcap \{A : B \subset A \in \mathcal{A}\}$$

と置く．$B = \{x\}$ などのときは $C(x, \mathcal{A})$ と書く．例えばこれは, X がハウスドルフで $\mathcal{A}$ が x の基本近傍系などの場合は $C(x, \overline{\mathcal{A}}) = \{x\}$ となり, $\mathcal{A}$ が $B \subset X$ に関するネットワークであれば $C(B, \mathcal{A}) = B$ となる．

[*10] 第二可算より弱い可算性だとこの事実は成立しない．実は可算な空間であって p 空間でないものが存在する．

定義 6.1 (Σ 空間)**.** 位相空間 X が Σ **空間**であるとは, 次を満たす局所有限な閉被覆の族 $\mathcal{F}_n$ が存在することを言う：$\emptyset$ でない閉集合の列 $K_1 \supset K_2 \supset \cdots$ が, ある点 $x \in X$ について $K_n \subset C(x, \mathcal{F}_n)$ を満たせば $\bigcap_n K_n \neq \emptyset$.

このような $\{\mathcal{F}_n\}$ を Σ **ネットワーク**という. 言い換えると, 空間 X が Σ 空間であるとは Σ ネットワークが存在することを言うのである.

明らかであるが, $\{\mathcal{F}_n\}$ が Σ ネットワークであって $\mathcal{H}_n < \mathcal{F}_n$ が局所有限閉被覆であれば, $\{\mathcal{H}_n\}$ もまた Σ ネットワークである. 良い Σ ネットワークが取れると言うことについて述べる補題を見ておこう：

補題 6.2. $(x, \{\mathcal{F}_n\})$ を Σ 空間とする. このとき次を満たす Σ ネットワーク $\{\mathcal{H}_n\}$ が存在する：

- $\mathcal{H}_{n-1} \subset \mathcal{H}_n < \mathcal{F}_n$.
- $\bigcup_n \mathcal{H}_n$ は可算コンパクト閉被覆 $\{C(x, \bigcup_n \mathcal{H}_n) : x \in X\}$ に関するネットワークである.

この条件を満たす Σ ネットワークを**標準** Σ **ネットワーク**という.

Proof. $\mathcal{F}_n$ の有限共通部分全体を $\mathcal{K}_n = \{K_i(a_i) : a_i \in A_i\}$ と置けば, これは局所有限閉被覆であり, さらに有限共通部分について閉じている. 従って与えられた $x \in X$ について x を含む $\mathcal{K}_n$ の元のうち最小のものがとれる. $H_n(a_1, \cdots, a_n) = \bigcap_{i \leq n} K_i(a_i)$ と置く（これは $\emptyset$ かもしれない）. $\mathcal{H}_n = \{H_n(a_1, \cdots, a_n) : a_i \in A_i, i \leq n\}$ としよう. すると $\mathcal{H}_n \subset \mathcal{H}_{n+1}, \mathcal{H}_n < \mathcal{F}_n$ である. 従って $\{\mathcal{H}_n\}$ は一つ目を満たす Σ ネットワークである.

二つ目を満たすことを示そう. $C(x, \bigcup_n \mathcal{H}_n)$ の近傍 U を任意に取る. 各 n について $x \in K_n(a_n)$ となるもののうち $K_n(a_n)$ が最小となるように a_n をとって $H_n = H_n(a_1, \cdots, a_n)$ としよう. このとき $C(x, \bigcup_n \mathcal{H}_n) = \bigcap_n H_n, H_n \subset H_{n+1}$ である. もしすべての n で $x_n \in H_n \setminus U$ がとれれば, $y \in \overline{\{x_n\}}$ は $y \notin U$ であるが, すべての n について H_n が閉であることから $y \in \bigcap_n H_n = C(x, \bigcup_n \mathcal{H}_n)$ である. これは U がこの近傍であったことに反する. 従ってある n について $H_n \subset U$ となる. 以上で $\mathcal{H}_n$ が求める Σ ネットワークであることが示された. □

以上で示されたことは, Σ 空間であることと標準 Σ ネットワークを持つことが同値であるということに他ならない. Σ ネットワークの定義を $C(x, \mathcal{F})$ の言葉で言いかえておこう：

補題 6.3. 位相空間 X の局所有限閉被覆の単調増大な族 $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \cdots \subset \mathcal{F}_n$ が Σ ネットワークであるための必要十分条件は, $C(x, \bigcup_n \mathcal{F}_n)$ が可算コンパクトとなることである.

Proof. 必要性を示そう（こちらに単調増大であることは不必要）. 可算コンパクトであることを言うには閉集合の可算降鎖が共通部分を持てば良いので, $C(x, \bigcup_n \mathcal{F}_n)$ の閉集合の可算降鎖 $K_{n+1} \subset K_n \subset C(x, \bigcup_n \mathcal{F}_n)$ をとる. $C(x, \bigcup_n \mathcal{F}_n)$ は X の閉集合なのでこのとき K_n は X でも閉で, さらに $K_n \subset C(x, \mathcal{F}_n)$ であるから $\mathcal{F}_n$ が Σ ネットワークであることから $\bigcap_n K_n \neq \emptyset$ である. よって示された.

十分性を示そう. $\emptyset$ でない閉集合の降鎖 $K_n \subset C(x, \mathcal{F}_n)$ をとる. また $\mathcal{F}_n$ は単調増大であるから, $C(x, \mathcal{F}_{n+1}) \subset C(x, \mathcal{F}_n)$ である. ここでもし $K_n \cap F = \emptyset, x \in F$ なる $F \in \mathcal{F}_m$ があれば, $l > \max\{n, m\}$ なる l をとって $K_l \cap C(x, \mathcal{F}_l) \subset K_n \cap C(x, \mathcal{F}_m) \subset K_n \cap F = \emptyset$ となって矛盾. 従って各 K_n は $C(x, \bigcup_n \mathcal{F}_n)$ と共通部分を持つ. ここで $C(x, \bigcup_n \mathcal{F}_n)$ は可算コンパクトであったから, $\bigcap_n (C(x, \bigcup_n \mathcal{F}_n) \cap K_n) \neq \emptyset$ である. よって $\bigcap_n K_n \neq \emptyset$ となり, $\mathcal{F}_n$ は Σ ネットワークであることがわかった. □

以上の補題のもとで, Σ 空間の定義をより簡単に言い換えよう：

命題 6.4. X が Σ 空間であるための必要十分条件は, ある可算コンパクト閉被覆に関する, 閉集合からなる σ 局所有限なネットワークが存在する[*11]ことである.

Proof. 必要性を示そう. $\mathcal{F}_n$ を標準 Σ ネットワークとし, $\mathcal{F} = \bigcup_n \mathcal{F}_n, \mathcal{C} = \{C(x, \mathcal{F}) : x \in X\}$ と置く. このとき $\mathcal{C}$ は可算コンパクトな閉被覆であって, $\mathcal{F}_n$ が標準 Σ ネットワークであることから $\mathcal{F}$ は $\mathcal{C}$ に関するネットワークとなる.

十分性を示そう. 可算コンパクト閉被覆を $\mathcal{C}$, それに関する閉集合からなる σ 局所有限なネットワークを $\mathcal{F} = \bigcup_n \mathcal{F}_n$（$\mathcal{F}_n$ は局所有限）とおこう. このときこの節の冒頭の注意から $C(x, \mathcal{C}) = C(x, \mathcal{F})$ がわかる. $\mathcal{H}_n = \{X\} \cup \bigcup_{i \le n} \mathcal{F}_i$ は単調増加な局所有限閉被覆である. さらに $\bigcup_n \mathcal{H}_n = \{X\} \cup \bigcup_n \mathcal{F}_n = \{X\} \cup \mathcal{F}$ であるから, 各 $x \in X$ について $C(x, \bigcup_n \mathcal{H}_n) = C(x, \mathcal{F}) = C(x, \mathcal{C})$ となってこれは可算コンパクト. 従って補題 6.3 より $\mathcal{H}_n$ は Σ ネットワークとなる. □

さて, p 空間は**一般化距離空間**と言われるものの一つであるが, Σ 空間も実はそのようなものの一つである. それは Nagata-Smirnov の距離化定理からわかるだろう.

定理 6.5 (Nagata-Smirnov の距離化定理)**.** 正則空間 X が距離化可能であるには, σ 局所有限な開基を持つことが必要十分.

Proof. 距離空間であればパラコンパクトなので任意の開被覆は局所有限な開被覆で細分される. $\{B(x : 1/n) : x \in X\}$ の細分となる局所有限開被覆を $\mathcal{B}_n$ と置く. $\bigcup_n \mathcal{B}_n$ は σ 局所有限な開基である.

逆に $\mathcal{B}_n$ が局所有限, $\mathcal{B} = \bigcup_n \mathcal{B}_n$ が開基となるとしよう. このとき（任意の開被覆が σ 局所有限な開被覆で細分されるので）パラコンパクトであるから正規. よって完全正則である. 各 $U \in \mathcal{B}_n$ に対し, $x \in U$ をとり, $f_U : X \to [0, 1]$ を $f_U(x) = 1, f_U(X - U) = 0$ となるように連続関数をとる. このとき

$$d_n(x, y) = \min\{1, \sum_{U \in \mathcal{B}_n} |f_U(x) - f_U(y)|\}$$

は $\mathcal{B}_n$ の局所有限性から（連続な）擬距離の族であり, $\mathcal{B}$ が開基であったことから任意の x と閉集合 $x \notin A$ に対し $x \in B \subset X \setminus A$ なる $B \in \mathcal{B}_n$ がとれ, このとき $d_n(x, A) > 0$ となる. 以上より $d(x, y) = \sum d_n(x, y)/2^n$ は（位相の合致する）距離となる. 距離であることは良いので, あとは位相が合致していることが気になる. $A \subset X$ を任意に取る. x が A の閉包に入ってなければ $d_n(x, \overline{A}) > 0$ なる n が取れるので $d(x, \overline{A}) > 0$ となり, 距離 d で A は x に集積しないから, 元の位相での A の閉包と d での A の閉包が等しいことがこれからわかる（逆は d は連続であるから A の閉包が d での A の閉包に含まれるのである）. これから従う. □

Nagata-Smirnov の距離化定理は, 言い換えれば, 開集合からなる σ 局所有限なネットワーク $\mathcal{F} = \bigcup_n \mathcal{F}_n$ が存在することが距離化可能であるための必要十分条件であると言っている. 上に述べた Σ 空間のネットワークでの特徴付け 6.4 を見れば, これから距離空間が Σ 空間となることは明らかだろう.

さて, Čech 完備や p 空間のときには, 多少の一般論を述べたのちにパラコンパクトと Lindelf を並行に論じてきた. しかし Σ 空間でそれを行うのは難しい[*12]ので, これからは Lindelöf Σ 空間に限って話を進めていこ

[*11] ここにおいて, コンパクト閉被覆とそれに関する閉集合からなる σ 局所有限なネットワークが存在するとしたものを**強 Σ 空間**（strict Σ-space）と言う.

[*12] パラコンパクト Σ 空間において補題 6.6 のようなものが見出せないことに起因するように思われる. なお, パラコンパクト Σ 空間は自動的に強 Σ 空間となることが容易に示されるが, 強 Σ 空間がパラコンパクトとなるための必要十分条件として次が知られて

う．そのために重要な補題を次に述べる：

補題 6.6. 正則空間 X について次は同値；

(1) Lindelöf Σ 空間である．
(2) コンパクト閉被覆と, それに関する閉集合からなる可算なネットワークが存在する．
(3) コンパクト閉被覆と, それに関する可算なネットワークが存在する．

Proof. (1)⇒(2) を示そう． $\{\mathcal{F}_n\}$ を, 可算コンパクト閉被覆 $\mathcal{C} = \{C(x, \bigcup_n \mathcal{F}_n) : x \in X\}$ に関する Σ ネットワークとする．可算コンパクトかつ Lindelöf なら明らかにコンパクトであるから, $\mathcal{C}$ はコンパクト閉被覆である． $\mathcal{F}_n$ が可算であることを示そう．そうすれば $\mathcal{F} = \bigcup_n \mathcal{F}_n$ が求める可算ネットワークであることがわかる．各 $F \in \mathcal{F}_n$ から $x_F \in F$ をとれば, 局所有限性から一致するものは高々有限個. $A = \{x_F : F \in \mathcal{F}_n\}$ は局所有限かつ素なので疎．各 x_F について, $U_F \cap A = \{x_F\}$ となるように開近傍 U_F をとれば, $\{U_F : F \in \mathcal{F}_n\} \cup \{X \setminus A\}$ は X の開被覆. Lindelöf 性から可算部分被覆がとれ, 従って $\mathcal{F}_n$ が可算であることがわかる．以上で示された．

(2)⇒(3) は自明である．逆に (3)⇒(2) は X の正則性からただちに従う．つまり正則空間のコンパクト集合には任意に小さい閉近傍が取れるので, $\mathcal{F}$ が (3) の条件を満たす可算ネットワークであれば $\overline{\mathcal{F}}$ が求めるものとなることがわかる．

(2)⇒(1) を示そう．$\mathcal{C}$ と $\mathcal{F}$ を条件から得られるコンパクト閉被覆とそれに関する閉集合からなる可算ネットワークとする．命題 6.4 より Σ 空間であることは良いので, Lindelöf であることを示す．任意に開被覆 $\mathcal{U}$ をとる．$F \in \mathcal{F}$ が $\mathcal{U}$-small であることを, $F \subset \bigcup_{i=1}^n U_i$ なる有限個の $U_i \in \mathcal{U}$ が存在することと定義する（ここだけの用語）．$\mathcal{U}_F = \{U \in \mathcal{U} : F \cap U \neq \emptyset\}$ と起き, $\mathcal{U}' = \bigcup\{\mathcal{U}_F : F \in \mathcal{F}$ は $\mathcal{U}$-small$\}$ と置こう．まずこれは有限集合の可算和なので $\mathcal{U}$ の可算部分集合．これが被覆であることを示せば良い．$x \in X$ を任意に取る． $x \in C$ なる $C \in \mathcal{C}$ を取ると, C はコンパクトなのである有限個の $U_i \in \mathcal{U}$ があり, $C \subset \bigcup_i U_i$ である．すると $\bigcup_i U_i$ は開なので, $\mathcal{F}$ がネットワークであることから, $C \subset F \subset \bigcup_i U_i$ なる $F \in \mathcal{F}$ が取れる．このとき F は $\mathcal{U}$-small であるから, 以上より $x \in C \subset F \subset \bigcup \mathcal{U}'$. 以上で可算部分被覆 $\mathcal{U}'$ が得られた． □

補題より以下の命題が従う：

命題 6.7. X, Y を Lindelöf Σ 空間, A を X の閉集合, $f : X \to Z$ を連続全射とする．このとき,

(1) A は Lindelöf Σ 空間である．
(2) Z は Lindelöf Σ 空間である．
(3) $X \times Y$ は Lindelöf Σ 空間である．

Proof. $\mathcal{C} = \mathcal{C}_X, \mathcal{C}_Y, \mathcal{F} = \mathcal{F}_X, \mathcal{F}_Y$ を補題 6.6 から取れる X, Y のコンパクト閉被覆とそれに関する可算ネットワークとする．

(1) を示すには, $\mathcal{C} \cap A = \{C \cap A : C \in \mathcal{C}\}, \mathcal{F} \cap A$ が補題 6.6 の条件を満たすことを言えば良いがこれは明らかである．

(2) を示すには, $f(\mathcal{C}) = \{f(C) : C \in \mathcal{C}\}, f(\mathcal{F})$ が補題 6.6 の条件を満たすことを示せば良いが, これはコン

いる：$\mathcal{C}$ をコンパクト閉被覆, $\mathcal{F} = \bigcup_n \mathcal{F}$（$\mathcal{F}_n$ は局所有限）をそれに関する閉集合からなる σ 局所有限な閉被覆とすると, $\mathcal{F}_n$ により 1:1 細分されるような局所有限開集合族 $\mathcal{U}_n$ が存在すれば, X はパラコンパクトである．これを用いればパラコンパクトのときにも同じように可算乗法性を示すことができる．

パクトの連続像がコンパクトであることと, 連続写像による開集合の逆像が開であることから明らかである.

(3) を示すには, $\mathcal{C}_X \times \mathcal{C}_Y = \{C_X \times C_Y : C_X \in \mathcal{C}_X, C_Y \in \mathcal{C}_Y\}, \mathcal{F}_X \times \mathcal{F}_Y$ が補題 6.6 の条件を満たすことを示せば良い. 任意に $C \times C' \in \mathcal{C}_X \times \mathcal{C}_Y$ と開近傍 $C \times C' \subset W$ をとる. Tube Lemma により C, C' の開近傍で, $C \times C' \subset U \times V \subset W$ を満たすものをとる. $U \subset F \subset U, C' \subset G \subset V$ なる $F \in \mathcal{F}_X, G \in \mathcal{F}_Y$ を取れば, $C \times C' \subset F \times G \subset U \times V \subset W$ となり $\mathcal{F}_X \times \mathcal{F}_Y$ は $\mathcal{C}_X \times \mathcal{C}_Y$ に関する可算ネットワークであることが示された. □

Lindelöf Σ 空間が神なのは, これらの性質が成立するからというだけではない. この命題, 実は逆が成立するのである. それについて述べるために以下の定理を示そう. これは例えば第二可算であるには可分距離空間の開連続像であることが必要十分である[*13]といったような, 空間の連続像による特徴付けの一つである：

定理 6.8. X が Lindelöf Σ 空間であることと, あるコンパクト空間 K, 第二可算空間 M による積空間 $K \times M$ の, ある閉集合からの連続像となることは同値.

Proof. コンパクトと第二可算が Lindelöf Σ 空間であること, Lindelöf Σ 性は有限積と閉集合と連続像に継承することから, 命題の条件を満たす時に Lindelöf Σ であることは良い. 与えられた Lindelöf Σ 空間 X に対し, K, M を構成しよう. $\mathcal{C}, \mathcal{F} = \{F_i : i \in \mathbf{N}\}$ を, 補題 6.6 により得られるコンパクト閉被覆とそれに関する可算ネットワークとする. K は X の適当なコンパクト化とする. 例えば Stone-Čech コンパクト化などでも良い. M やその他を構成しよう. M と閉集合の構成をしよう. $\mathbf{N}$ に離散位相を入れ, $s \in \mathbf{N}^{\mathbf{N}}$ に対し, $P_s = \bigcap_n \overline{F_{s(n)}}$ と置く. ただしこの閉包は K で取っている. $M = \{s \in \mathbf{N}^{\mathbf{N}} : P_s \subset X\}$ とすれば, これは第二可算である. $F = \{(x, s) \in K \times M : x \in P_s\}$ と置く. これが閉であることを示すために $(y, t) \notin F$ を取る. するとある $n \in \mathbf{N}$ があって $y \notin \overline{F_{t(n)}}$ である. このとき, $y \in U, U \cap \overline{F_{t(n)}} = \emptyset$ なる K の開集合 U と, t の近傍 $V = \{t(n)\} \times \prod_{m \neq n} \mathbf{N}_m = \{s \in \mathbf{N}^{\mathbf{N}} : s(n) = t(n)\}$ に対し, $(z, u) \in U \times V$ なら $z(n) \notin \overline{F_{t(n)}}, u(n) = t(n)$ より $(z, u) \notin F$ がわかる. よって閉である.

最後に写像の構成をしよう. p_K を K への標準全射とし, $f = p_K|_F$ と置く. これは明らかに連続なので, X への全射であることを示せばすべての証明が完了する. まず, $(x, s) \in F$ なら $x \in P_s \subset X$ であるから $p(x, s) \in X$. よって像は X の部分集合である. 像が X を一致することを示すために, まず次を示そう：$\overline{\mathcal{F}} = \{\overline{F} : F \in \mathcal{F}\}$ は X を $K \setminus X$ から分離する[*14]（すなわち, 任意の $x \in X, y \in K \setminus X$ に対し, $x \in \overline{F} \not\ni y$ となる $\overline{F} \in \overline{\mathcal{F}}$ が存在する）. $x \in X, y \in K \setminus X$ を任意にとり, $x \in C$ なる $C \in \mathcal{C}$ をとる. C はコンパクトなので, K の閉集合である. 従って $C \subset U \subset \overline{U} \not\ni y$ なる K の開集合 U がとれる. このとき $C \subset F \subset U$ なる $F \in \mathcal{F}$ をとれば, $x \in C \subset \overline{F} \subset \overline{U} \not\ni y$ となるので以上で示された. さて, $A = \{n \in \mathbf{N} : x \in \overline{F_n}\}$ と置けば, $\overline{\mathcal{F}}$ が X を $K \setminus X$ から分離することより, 任意の $s : \mathbf{N} \to \mathbf{N}, s(\mathbf{N}) = A$ に対し $x \in P_s \subset X$ である. 以上より $(x, s) \in F$ であるから f は全射. □

これを使えば, 逆の成立はほとんど自明である：

定理 6.9. すべてのコンパクト空間, 第二可算空間を含み, 閉部分集合, 連続像へ継承し, 有限積で閉じた空間のクラスのうち, 最小のものは Lindelöf Σ 空間である.

Proof. 求めるクラスを $\mathbf{D}$ とおこう. X が Lindelöf Σ 空間であれば, 上の命題より, X はあるコンパクト空間 K とある第二可算空間 M の積 $K \times M$ の閉部分空間 F からの連続像となる. $\mathbf{D}$ はコンパクト空間と第二可

*13 Ponomarev と花井の定理. 児玉, 永見 [2]2 章 §14 定理 14.10, 問題 2.M 参照.

*14 実はこの性質は Lindelöf Σ 空間を特徴付ける.

算空間を含むから, $K, M \in \mathbf{D}$, 有限積で閉じるから $K \times M \in \mathbf{D}$, 閉部分集合を含むから $F \in \mathbf{D}$, 連続像を含むから $X \in \mathbf{D}$. 従って, すべての Lindelöf Σ 空間は $\mathbf{D}$ に含まれる. 一方で Lindelöf Σ 空間のクラスがこの性質を満たすことは前に述べた通りである. 以上と $\mathbf{D}$ の最小性より $\mathbf{D}$ は Lindelöf Σ 空間のクラスとなる. $\square$

p 空間における長田の定理 5.10 を用いて定理 6.8 を言い換えると次のようになる：

定理 6.10. 空間 X が Lindelöf Σ 空間であるための必要十分条件は, X がある Lindelöf p 空間の連続像となることである.

7 さいごに

以上, とくに後半 3 節で Lindelöf 空間における美しい調和を見てきた. パラコンパクトの場合には幾分事情が複雑なようであるが, こちらも様々な興味深い事実が知られている. 積空間の正規性に動機付けられて導入された森田の空間や, M_1, M_2, M_3 空間など, 多くの興味深い空間族が p 空間や Σ 空間と複雑に絡み合っている. その様子は [1] に載っている図などで日本語でも確認できる. まさに "深淵"である.

位相空間論におけるさらなる深淵を覗きたい方は [5] などをオススメする（私には解読不能な鈍器である）.

参考文献

[1] 日本数学会, 『岩波 数学事典 第 4 版』, 岩波書店, 2007.

[2] 児玉之宏, 永見啓応, 『位相空間論』, 岩波書店, 1974.

[3] J. Chaber , *Perfect Image of p-spaces* , Proc. Amer. Math. Soc. (1982).

[4] R.Engelking , *General Topology* , Heldermann Verlag, Berlin, (1989).

[5] K. Kunen , J. E. Vaughan , *Handbook of Set-Theoretic Topology* , North-Holland , (1984).

[6] J. Nagata , *Modern General Topology*, North-Holland, (1985).

[7] A. Hajnal , I. Juhász , *On the Products of Weakly Lindelöf Spaces* , Proc. Amer. Math. Soc., 130 , no.1 , 454-456, (1975).

[8] P. Staynova, A Comparison of Lindelöf-type Covering Properties of Topological Spaces , *Rose-Hulman Undergraduate Mathematics Journal* , vol. 12, no.2 , (2011).

[9] L. Steen , J. A. Seebach Jr. , *Counterexamples in Topology* , Dover Publications, Inc., New York, (1995).

[10] J. M. Worrell, Jr. *A perfect mapping not preserving the p-space property.* , presented at Pittsburgh Conference on General Topology , (1970).