

行きはよいよい帰りは怖い!?

微分可能だがその導関数が積分できないような関数の構成

藤井幹大

九州大学理学部数学科3年

2016年6月25日

1 はじめに

数学の分野で解析というと、微分積分をはじめとし、数学的対象の量を測ることや極限操作をする分野の総称です。解析学は物理学やその他の自然科学、また統計学などさまざまな数学の分野で利用されています。ですからこの講演をお聞きの方々も解析学にはなじみがあるのではないのでしょうか。そこでこの講演では微分積分学の（理系大学生なら）誰もが知っているであろう事柄を題材にして興味深い例などを考えてみたいと思います。

2 講演内容

関数 $F(x)$ は実軸上の微分可能な未知関数とします。このとき $F(x)$ が常微分方程式

$$F'(x) = f(x)$$

をみたし、 $f(x)$ が既知であるとき関数 $F(x)$ を求めよ、といわれたら

$$F = \int_0^x f(t) dt$$

とすればよいと思う方もいらっしゃると思います。しかしながらこれは一般には正しくない、というのが今回のテーマなのです。

講演を通して数学者 Volterra が考案した“微分可能だがその導関数が積分できない関数”を構成しますが、その過程でしばしば Riemann 積分の限界を感じさせる箇所がでてきます。それと同時に今日の解析学で欠かすことの出来ない、測度論や Lebesgue 積分がなぜ生まれてきたのかを納得できる一面も垣間みることが出来ます。現代では、Volterra の例は Lebesgue 積分論の言葉を使って述べられますが、今回は Riemann 積分の言葉だけで述べ

たいと思います。高校の知識プラス α くらいでも聞けるような内容ですのでお気軽にお楽しみください。(参考文献は追加されることがあります)

参考文献

- [1] 杉浦光男 (1980) 解析入門
- [2] 小柴洋一 Volterra と H.J.Smith の論文に見られる、その導関数が Riemann 積分可能でない関数の古典例について
<http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku/contents/pdf/1064-1.pdf>
(2016.5.16 アクセス)