バナッハ・タルスキの定理と選択公理

平野　光

九州大学理学部数学科 3 年

2016 年 6 月 26 日

1　はじめに

数学の基礎に関する話題にあまり馴染みが無い方に、少しでも興味を持ってもらうきっかけを作りたいと思い、バナッハ・タルスキの定理という、印象に残りやすいと思われるテーマを選びました。

今回の講演の具体的な目標は 3 つございます。一つ目は、バナッハ・タルスキの定理の主張を正確に伝えること。二つ目は、いくつかの例を通じて「選択関数が存在する」ことと「選択関数を、具体的にコレ！と指定する方法が分かっている」こととの間のニュアンスの違いを感じて頂くこと。三つ目は、定理の証明の中で選択公理がどのように用いられているかをはっきりと伝えることです。

また今回の講演では、バナッハ・タルスキの定理のパラドックスとしての側面や、私や他の様々な方々がこの定理をどのように解釈しているのか、等の話題は話の主軸には置きません。それは、決して私がこれらの話題を軽視しているからではございません。この定理を通して、驚きや恐れをはじめとする色々な感情を覚えることはとても大切なことだと思います。ただその感情は、講演での私の言葉から誘導されるべきではありません。定理の証明を通して、聴衆の方々に自分自身でじっくり考えて頂きたいです。その上で、もしこの定理に何らかの奇妙さを感じない方が居たとしても、それは必ずしも悪いことでは無いと思うのです。

私の力不足もあり限られた講演時間の中でお伝えできることは少ないかもしれませんが、この講演を通してこの定理や選択公理についてもっと勉強してみたいと感じたり、あわよくば基礎論に興味を持ってくれる方がいらっしゃるなら、私はとても嬉しいです。

2　講演内容

難しい予備知識は特に仮定しませんが、群に関する基礎知識 (特に、群の作用や自由群) や集合の濃度に関する簡単な知識があると理解がより楽になるかと思います。また、聴衆の方にとって馴染みの無い用語が出てきた場合には、何らかの意思表示をして頂ければその都度解説します。

理想的な話の終着はバナッハ・タルスキの定理 (3 次元ユークリッド空間上の任意の二つの、内点をもつ有界集合は互いに分割合同である) の証明を終えることですが、時間的に厳しいかもしれません。話の伝わり具合によって説明の速さを変えようと思うので、その上で間に合わなかった場合には、より弱い主張の「単位球は、互いに素な二つの、それぞれ単位球に分割合同な部分集合に分解できる。」まで示します (間に合った場合もこれは示すことになります)。その中で、いくつかの具体例を通じて選択公理を解説し、群の作用や自由群に関する説明を簡単にします。

参考文献

[1] Stan Wagon,「The Banach-Tarski Paradox」,Cambridge Univ.Press,1985
[2] 志賀浩二,「無限からの光芒」, 日本評論社,1988
[3] 砂田利一,「バナッハ・タルスキーのパラドックス」, 岩波書店,1997
[4] 田中尚夫,「選択公理と数学」遊星社,1987
[5] 鈴木通夫,「群論　上」, 岩波書店,1977