春の談話会 2016

トポロジー入門

お茶の水女子大学理学部数学科 2 年　堀　百花 *

2016 年 5 月 22 日

Abstract

同一視の基準が与えられたときに数学的対象を区別するためのアイデアとして「不変量」というものがある．今回は不変量の例として回転数を紹介し，その応用としていくつか定理を示してみようと思う．不変量の嬉しさとトポロジーの雰囲気を感じ取っていただけたら幸いである．

Contents

Notation

本稿では簡単のために以下を断り無く用いる．

- n 次元円板とは，$D^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + \cdots + x_n^2 \leq 1\}$ のこと．
- n 次元球面とは，$S^n = \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_1^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 1\}$ のこと．

* momokahori124@gmail.com

1　やわらかい幾何学と不変量

トポロジーは“やわらかい幾何学”とも言われるように，幾何学の一部で，“やわらかい”変化でうつりかわる図形を**同一視**して調べる分野である．同一視とは，その名の通り，違うものを一定の基準の下で同じものとして見ることである．同一視の例として，図形の相似がある．図形の相似とは，拡大縮小，回転，平行移動，裏返しなどの違いを無視して同じと見る基準であった．では，柔らかい変化の違いを無視するというのはどのようなことだろうか．これは，砕けた言い方をすれば，図形[*1]をゴムのように伸び縮みするものだと思うことである．例えばドーナツとコーヒーカップ，円周と四角形の枠などはトポロジーの見方では同じものにみえる．このような同一視の基準を同相という．本稿では，この同相と後で定義するホモトピックという 2 つの同一視の基準を紹介しようと思う．

1.1　同一視する基準

Definition 1.1 (同相)
同相写像 $f : X \to Y$ が存在するとき，図形 X と Y は同相であるといい，$X \approx Y$ と書く．同相写像とは，連続かつ全単射で，逆写像も連続であるもののことである．

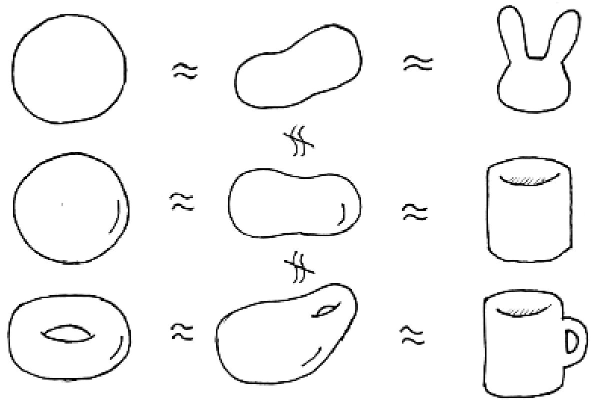

Figure.1　同相な図形たち

(横に並んでいるものは，“トポロジーの目”では同じにみえ，行が違うものは違うものにみえる．)

連続というのは，“ちぎったりしない”という意味で，全単射は“一対一に対応する”ということだと思って欲しい．例えば，連続かつ全単射であるが，逆写像が連続でないものの例として，$f : (0, 2\pi] \to S^1 : \theta \mapsto e^{i\theta}$ がある．位相的構造を保って欲しい (切ったり貼ったりしない) ので，写像が連続であることを要請しているのに納得がいくと思う．[*2]

*1 “図形”は厳密には多様体というものである．

*2 ここで，連続写像とは連続関数の一般化で，近いもの同士を近いところに写す写像である．厳密には，写像 $f : X \to Y$ が連続写像であるとは，Y の開集合の逆像が X の開集合になることである．トポロジーに興味をもったらまずは位相空間論を勉強しなければならない．はじめに [4] の Chapter1 と 2 を読むことをオススメしたい．

同相という関係は，“図形” に対して与えられる基準であるが，写像に対しての同一視する基準も紹介しよう．

Definition 1.2 (ホモトピック)

$f, g : X \to Y$ を連続写像とする．$t = 0$ で $f(x)$，$t = 1$ で $g(x)$ となるような連続写像 $F(x, t) : X \times [0, 1] \to Y$ が存在するとき，f と g はホモトピックであるといい，$f \sim g$ と書く．

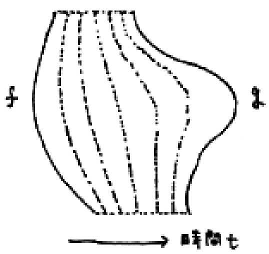

Figure.2　ホモトピック

(t を時間だと思うと，F は時間が 0 から 1 まで動く間に f が g に連続的に動くようすを表している．)

1.2　不変量とは？

さて，新しいものの見方を導入したときに，その見方で何と何が違うのか，同じなのか，ということをはっきりさせたいと思うだろう．しかし，一般に与えられた基準において “違う” ということを定義に則して示すことは難しい．例えば，ある 2 つの図形が同相でないことを言うには，同相写像が 1 つもないといことを言わなければならない．(難しそう．) そこで，“ある関係があるものを同じと見る” という見方が与えられたとき，

「関係があるものの間で変わらない性質」

に着目すればいいことに気づくだろう．(これなら性質を取り出すだけで良いので簡単そう．) この性質が数や代数的なもののとき，**不変量**という．

Definition 1.3 (不変量)

I が関係 $\sim$ で不変な量 (不変量) であるとは，

$$X \sim Y \text{ ならば，} I(X) = I(Y)$$

が成り立つこと．

定義の対偶をとるとわかるように，2 つの間で不変量が異なれば，それらに関係がないことがわかる．(もともと対偶の性質を満たすようなものが欲しかった．)

Example 1.4 (不変量の例)

同一視するものの間で変わらないものの例をみてみよう．

数学的対象	同一視する基準	不変量
多角形	相似	角度，辺の長さの比
“図形”	同相	次元，連結成分の個数，穴の数，Euler 数
連続写像	ホモトピック	回転数

例えば，穴の数が不変量だと知っていたら，球面とドーナツの表面が同相でないことが定義に則して示さなくても瞬時にわかってしまうのである．(この例は直感的には明らかだが，本来定義に則して示さなければならなくて，定義に則して示すことが難しい，ということに注意して欲しい．) また，高次元などの想像できない図形などの間に関係がないことも，結び目がほどけるかどうかという問題も，不変量を計算することである程度わかってしまう．不変量によってモノを分類することもできるだろう．

「トポロジーの主な関心は不変量にある」

といっても過言ではない．

1.3 Euler 数

ここで，3 章で扱う Euler 数について説明しておく．Euler 数 $\chi(X)$ は，中学で学んだと思うが，多面体 X に対して，$\chi(X)=$(頂点の数)$-$(辺の数)$+$(面の数) と定義される．そして，それが凸閉多面体のとき 2 になるという公式として扱っていたと思う．実は，この概念は n 次元の “多面体” に対しても次のように拡張できる．

$$\chi(X) = \Sigma_{k=0}^{n}(-1)^k(k \text{ 次元の “面” の数 })$$

Euler 数は同相に関する不変量であり，柔らかい変化で不変な量であるから，曲面を “多面体” に空気を入れてふくらませたものと考えて，空気を入れる前の多面体の Euler 数を曲面の Euler 数とすると考えてよい．例えば，球面の Euler 数は，膨らませるまえの図形の Euler 数と一致するから，四面体 (立方体とかでもいい) について計算することにより 2 であることが分かる．一般に，n 次元球面の Euler 数は $1+(-1)^n$，穴が g 個の閉曲面*3の Euler 数は $2-2g$ であることが知られている．

2 回転数の応用

ここでは，不変量の例として**回転数**というものを紹介する．回転数は，n 次元球面 S^n から自身への写像 f に対して定まる整数 $\deg(f)$ のことで，その名の通りのイメージをしてもらって構わない．ここで，大事なのは，回転数が写像に対して「ホモトピックで不変な量」であるということである．すなわち，2 つの連続写像 f, g について $\deg f \neq \deg g$ が言えたら，なんと f と g はホモトピックでないといえてしまう．

回転数が不変量であることを用いて，Brouwer の不動点定理，つむじの定理，代数学の基本定理，Borsuk-Ulam の定理*4，ハムサンドイッチの定理*5 などが示せるが，本章では最初の 2 つを扱いたいと思う．本稿を

*3 境界のない 2 次元の図形．

*4 連続写像 $f: S^n \to \mathbf{R}^n$ に対し，$f(-a) = f(a)$ をみたす $a \in S^n$ が存在する．

*5 平面 $\mathbf{R}^2$ の 2 つの可測部分集合 A_1, A_2 に対して，それぞれの面積を 2 等分する直線が存在する．(詳しくは [2] を見て欲しい．)

通して，不変量を考えることの利点を感じることができると思う．

Definition 2.1 (回転数)
連続写像 $f : S^n \to S^n$ に対して，回転数という整数 $\deg f$ が定まる．$n = 1$ のとき，f が S^1 に本質的に何回巻き付いているかを回転数と定義する．n が 2 以上に対する定義も，f が S^n を何重に包んでいるかという数で定める．*6

厳密には前提知識を要求するのでここでは避ける．

Example 2.2

- $f_k : S^1 \to S^1 : z \mapsto z^k$ ならば，$\deg(f_k) = k$.
- 恒等写像　id: $S^n \to S^n : x \mapsto x$ ならば，deg(id)= 1.
- 鏡映　$\gamma_i : S^n \to S^n : (x_1, \ldots, x_{n+1}) \mapsto (x_1, \ldots, -x_i, \ldots, x_{n+1})$ ならば，$\deg(\gamma_i) = -1$.

さて，Brouwer の不動点定理とは次のことをいう．

Theorem 2.3 (Brouwer の不動点定理)
任意の連続写像 $f : D^{n+1} \to D^{n+1}$ は不動点*7をもつ．

コーヒーが入ったカップをぐるんと回すと，コーヒーの表面に渦ができるというのはイメージできると思う．このコーヒーの表面を円板，渦を不動点 (すなわち動かない点) と考えるとこの定理は直感的には成り立ちそうである．これを示すために次を示しておこう．

Lemma 2.4
$id : S^n \to S^n$ を，連続性を保ったまま定義域を拡張して $D^{n+1} \to S^n$ にすることはできない．

Proof) (直感的に，円周からの連続写像 id が存在したとき，連続性を保ったまま定義域を円板に拡張できないというのは分かると思う．) 任意の連続写像 $f : D^{n+1} \to S^n$ は，境界に制限して id になることはない，ということを示そう．$F : S^n \times I \to S^n$ を，$F(x,t) := f(xt)$ と定めると，f が連続であることから F も連続で，時間 0 で $f(0)$(定値写像)，時間 1 で $f|S^n(x)$ である．よって f は定値写像とホモトピック．定値写像の回転数は 0 であったから，当然 $f|S^n$ の回転数は 0．しかし，id の回転数は 1 である．回転数がホモトピックで不変な量であることから，id と $f|S^n$ がホモトピックとなることはない．

□

このLemma より，示したかった定理は案外簡単に示せてしまう．

Proof) (Brouwer の不動点定理)
f が不動点をもたないと仮定して矛盾を導く．仮定より $f(x) \neq x$ であるから，x と $f(x)$ を通る直線上で x の方に近い境界の点を $g(x)$ とする．すると，g の作り方から $x \in S^n$ なる点に対しては $g(x) = x$ を満たすから，$g : D^{n+1} \to S^n$ は境界に制限すると恒等写像になる連続写像．しかし，このような写像はない．なぜなら，S^n から自身への恒等写像が存在したとき，その定義域を連続的に D^{n+1} に拡張できないからである．よって f は不動点をもつ．□

*6 回転数は色々な定義の仕方があるが，$n = 1$ に対しては比較的簡単に定義できる．参考文献 [1],[2] をみられたい．
*7 $f(x) = x$ をみたす x のこと．

この証明は，f の連続性が本質的である．(連続でないもので不動点を持たないものは簡単に作れますよね．) 不動点定理は数多く存在するが、ブラウワーの不動点定理の結果は様々な定理に応用されるので，トポロジーを特徴付ける重要な定理といえる．その応用は幾何学だけに留まらない．また，この定理の証明と同様に「回転数が違うものがホモトピックになってしまう」という矛盾を導く方法で次が示せる．

Theorem 2.5 (代数学の基本定理)
複素係数多項式は複素数の範囲でかならず零点*8をもつ．*9

この定理は，実数係数の多項式が実数の範囲で解をもつとは限らないが，数の概念を複素数まで拡張すると全ての多項式が解をもってしまうという驚くべき定理である．

Proof) 発表では言及しないかもしれないが，証明を載せておこう．ここで，$S^1 = \{z \in \mathbb{C} |\ |z| = 1\}$ とする．
多項式を $p(z)$ とする．$p(z) = 0$ の解の存在を示すのだから，$p(z)$ の最高次の係数は 1 として良い．そこで，多項式を $p(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n$，$a_1, \ldots, a_n$ を複素数，$p(z)$ は定数でないので $n \geq 1$ とする．$p(z) = 0$ が解を持たないと仮定して，回転数が違うものがホモトピックになってしまうという矛盾を導く．次のような連続写像 $F : S^1 \times [0,1] \to S^1$ を構成する．まず $t \in (0,1]$ に対して，

$$F(z,t) = \frac{p((1-t)z/t)}{|p((1-t)z/t)|},\ (z \in S^1,\ t \in (0,1]\ )$$

と定める．ここで，

$$(\text{右辺}) = \frac{t^n p((1-t)z/t)}{|t^n p((1-t)z/t)|} = \frac{(1-t)^n z^n + a_1(1-t)^{n-1} z^{n-1} t + \cdots + a_n t^n}{|(1-t)^n z^n + a_1(1-t)^{n-1} z^{n-1} t + \cdots + a_n t^n|}$$

であるから，$F(z,t)$ は $t = 0$ に対しても定義できる．F は連続で，時間 $t = 0$ のとき $z^n/|z^n| = z^n$，時間 $t = 1$ のとき $p(0)/|p(0)| = a_n/|a_n| =$(定数) であるから，$f(z) = z^n$ と定値写像はホモトピック．しかし，$\deg f = n$，deg(定値写像)$= 0$ であるから，これは矛盾．よって，$p(z) = 0$ は解をもつ． □

3 ベクトル場への応用

回転数が不変量であることから，なんと次の主張が成り立つことがわかる．

「地球上には，“風の吹かない点” が必ず存在する．」

これを**つむじの定理**という．「髪の毛をどんなふうに流してもつむじができてしまう」とか「ヤシの実の毛はとかせない」，とも言われているらしい．これも，Brouwer の不動点定理と同じように，直感的には成り立ちそうである．(実は，偶数次元の球面にはこのような点が必ず存在してしまう．) また，この章では，閉曲面に “風の吹かない点” が存在しないのはどんな時か，ということにも触れたいと思う (系 3.7)．

3.1 ベクトル場

数学的に記述するために，いくつか定義をしておきたい．

Definition 3.1 (ベクトル場)
“図形”M のベクトル場とは，M の各点に接ベクトルを対応させるような写像で，それが点の動きに対して連続的なもののことをいう．すなわち，

*8 多項式 $p(z)$ の零点というのは，$p(z) = 0$ の解のことである．
*9 本稿とは関係ないが，6/12(日) に早稲田である春の談話会で，この定理の面白い証明が聞ける．

$$v : M \to \mathbb{R}^k : x \mapsto v(x)$$

なる連続写像 v のことである．[*10]

“風の流れ” のようなものを思い浮かべて欲しい．

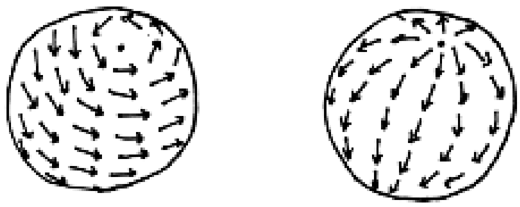

Figure.3　球面上のベクトル場

Definition 3.2 (ベクトル場の指数)
M を “図形”，p を M 上の点，v を M 上のベクトル場とする．p に対応する接ベクトルを $v(p)$ とする．このとき，点 p における指数 (index) を次のように定める．

- $v(p) \neq 0$ なる p に対しては，$\mathrm{index}_p v = 0$.
- $v(p) = 0$ なる p を**零点**といい，$\mathrm{index}_p v$ を零点の十分小さい近傍での回転数で定める．
  厳密にはこう定義する．まず，p 以外に零点を含まないような，p を中心とする円板 D_r^n をとる．次に，その円板の境界 S_r^{n-1} にたいして，$\bar{v}(x) = v(x)/|v(x)| (x \in S_r^{n-1})$ とおいて，$\bar{v} : S_r^{n-1} \to S^{n-1}$ を定める．この写像 $\bar{v}$ の回転数で index を定める．

零点は “風が吹かない点” のことである．ここで，零点は孤立している[*11]と仮定する．

Example 3.3 (ベクトル場とその零点における指数)

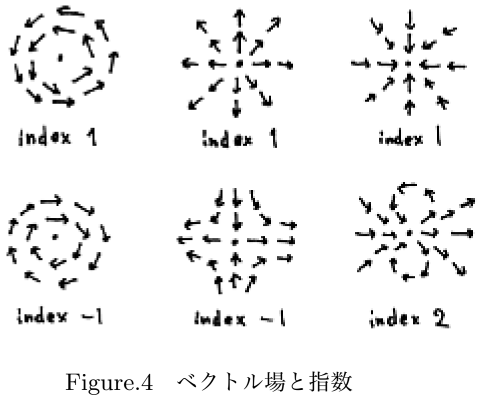

Figure.4　ベクトル場と指数

ここで，つむじの定理を示すために，次の補題を示しておく．

[*10] 本稿では簡単のため，多様体を $\mathbf{R}^k$ に埋め込んでいる．実際，コンパクトな n 次元多様体は十分大きい Euclid 空間に埋め込める．
[*11] 孤立しているとは，十分小さい近傍をとれば自分以外に零点を含まないようにできることをいう．

Lemma 3.4

n が偶数のとき，S^n 上の対蹠写像と恒等写像はホモトピックではない．ここで対蹠写像とは，x に $-x$ を対応させる写像のことである．

Proof) 回転数が異なることが示せれば，ホモトピックでないといえる．$n = 2m$ とおく．すると，対蹠写像は，鏡映の合成 $\gamma_1 \circ \cdots \circ \gamma_{2m+1}$ で表せる．鏡映の回転数は 1 であったから，その回転数は $(-1)^{2m+1} = -1$ である．[*12] これは，恒等写像の回転数 1 と異なる． □

3.2 つむじの定理

早速，つむじの定理を示していこう．

Theorem 3.5 (つむじの定理)

零点が存在しないベクトル場が n 次元球面上に存在するための必要十分条件は，n が奇数であることである．

Proof)

[必要性] 零点が存在しないベクトル場が存在すると仮定する．S^n 上の各点 x で $v(x) \neq 0$ だから，$\bar{v}(x) = v(x)/|v(x)|$ とおくことにより，連続写像 $\bar{v} : S^n \to S^n$ を考えることができる．ここで，

$$F : S^n \times [0, \pi] \to S^n,\ \ F(x, \theta) = x \cos\theta + \bar{v}(x) \sin\theta$$

なる F を考えると，連続であり，$|F(x, \theta)| = 1$，$F(x, 0) = x$，$F(x, \pi) = -x$ である．(F は時間 0 で恒等写像，時間 π で対蹠写像．) このような F が構成できることから，恒等写像と対蹠写像はホモトピックであることがいえるが，$Lemma3.4$ からこれは n が偶数のときあり得ない．したがって，n は奇数である．

[十分性]n が奇数のとき，零点が存在しないベクトル場を 1 つ構成すればよい．

$$v(x_1, \ldots, x_{2n}) = (x_2, -x_1, \ldots, x_{2n}, -x_{2n-1})$$

は S^{2n-1} 上の零点をもたないベクトル場．実際，x が球面上の点であることから $v(x) \neq 0$，$v(x) \cdot x = (x_2, -x_1, \ldots, x_{2n}, -x_{2n-1}) \cdot (x_1, \ldots, x_{2n}) = 0$ (内積 0) であることから，$v(x)$ が接ベクトルとなっている． □

次を紹介しておきたい．

Theorem 3.6 (Poincare-Hopf)

向き付け可能閉曲面 M 上のベクトル場 v に対して，

$$\textstyle\sum_{p \in M} \mathrm{index}_p v = \chi(M)$$

が成り立つ．特に，Euler 数が 0 でないもの上のベクトル場は必ず零点をもつ．

Proof) **(sketch)** ベクトル場の指数の総和はベクトル場の取り方に依らない．よって 1 つのベクトル場に対して計算すれば良い．穴が g 個の閉曲面のベクトル場の指数の総和を，1 つのベクトル場に対して実際に計算すると $2 - 2g$ であることが分かる．これは Euler 数に一致する． □

[*12] $\deg(f \circ g) = \deg(f) \deg(g)$ が成り立つ．

Remark 3.7

この等式の嬉しいところは，局所的な情報 (index) で大域的な情報 (Euler 数) を表しているところにある．「ベクトル場の指数の総和が不変量」ということを主張していることにも注意されたい．

Corollary 3.8

向き付け可能閉曲面に零点を持たないベクトル場が存在するための必要十分条件は，穴の数が 1 つであることである．

Proof) 1 章で言及したように，穴の数が 1 以外の閉曲面は Euler 数が 0 でないから，そのベクトル場が零点を持たないといえる． □

つまり，流れ続けるベクトル場はトーラス (ドーナツの表面) と同相なもの上にしか存在しない．

3.3 代数への応用 (付録)

また，オマケとしてこの定理の代数への応用を 1 つ紹介しておこう．複素数を拡張した数として「4 元数 $\mathbb{H}$」というものがあることを知っているだろうか．複素数が $a+bi(a,b$ は実数 $), i^2=-1$ と定めることにより全ての複素数の積が定まるのと同様に，4 元数は $a+bi+cj+dk(a,b,c,d$ は実数) と表され，$i^2=j^2=k^2=-1, ij=-ji=k, jk=-kj=i, ki=-ik=j$ と定めることにより全ての 4 元数の積が定まるものである．$c=d=0$ であるものは複素数であるから，4 元数は実数，複素数を含んでいることがわかる．さらに，4 元数は斜体とい構造を持っている．斜体とは，加法と乗法に対して結合法則，分配法則をみたし，加法と乗法の単位元と逆元*13があるようなもののことである．積に関する可換性は要求しないことに注意する．

ベクトル空間の構造として，実数 $\mathbb{R}$ は 1 次元ベクトル空間，複素数 $\mathbb{C}$ は 2 次元ベクトル空間，4 元数 $\mathbb{H}$ は 4 次元ベクトル空間と同じであるが，実は，

「3 次元ベクトル空間の構造をもつ数が存在しない*14」

ということを，つむじの定理に矛盾させることで簡単に示せてしまうのである．

Theorem 3.9

3 次元実ベクトル空間 V には，斜体となるような積が存在しない．

Proof) 斜体となるような積が存在すると仮定して矛盾を導く．V の基底を $\{v_1, v_2, v_3\}$ とする．このとき，$p \in S^2$ に対して，$c_1v_1p+c_2v_2p+c_3v_3p=(c_1v_1+c_2v_2+c_3v_3)p=0$ は，$p \neq 0$ より，$c_1=c_2=c_3=0$ と同値であるから，$\{v_1p, v_2p, v_3p\}$ は 1 次独立．$\bar{p}:=v_3p/|v_3p|$ とすると，$\bar{p} \in S^2$．$\bar{p}$ に垂直な接平面 S への v_1p, v_2p の射影を $\bar{v_1}(p), \bar{v_2}(p)$ とすると，v_1, v_2 の独立性から，これらは常に S を張っている．よって，$\bar{v_1}(p), \bar{v_2}(p)$ は零点を持たないベクトル場である．これはつむじの定理に矛盾する． □

また，これを奇数次元に拡張した以下の定理も示すことができる．証明は 3 次元のものと本質的には変わらない．証明は [2] に載っている．

Theorem 3.10

奇数次元実ベクトル空間には，斜体となるような積は存在しない．

*13 積の逆元は 0 以外の数に対して．

*14 3 次元ベクトル空間にいい感じの積が入らない

さらに，次が知られている．

Fact 3.11
斜体となるような積が存在する実ベクトル空間の次元は，$1, 2, 4$ に限る．

この証明は，[6] に載っている．

References

[1] J．Milnor，“*Topology from the Differentiable Viewpoint* ”，The University Press of Virginia Charlottesville,

[2] 桝田幹夫,「代数的トポロジー」，講座　数学の考え方 15，朝倉書店，2002

[3] 松本幸夫,「トポロジーへの誘い」，幾何学をみる 1，遊星社，2008

[4] I.M.Singer , J.A.Thorpe. “*Lecture Notes on Elementary Topology and Geometry.*” , Springer,1977.

[5] 杉ノ内萌,「回転数とトポロジー 2 :つむじの定理とその応用」，都数夏合宿発表資料，2015.

[6] A.Hatcher.“*Vector Bundles and K-Theory*”,2009.

全体にわたって参考にしたのは [1],[2] である．回転数の応用である様々な定理を，低次元を先に示すことでわかりやすく書いてあるのが [2]，多くの本に書いてあるものと異なる面白い証明を与えているのが [1] である．回転数が，[1] では “向き”，[2] ではホモロジー群で定義されている．[3] は，高校生にも分かるように噛み砕いて書かれているが，発展的なトポロジーの興味深いトピックが載っている本で，ぜひ読んで欲しいと思う．[4] は，トポロジーに興味をもったらはじめに読んで欲しい本で，位相空間論や基本群などが載っている．[5] には，つむじの定理の微積分を用いた証明が載っている．最後の付録の証明は [6] を見られたい．

Acknowledgement

本稿の推敲や発表練習にあたって助言をくださった都内数学科学生集合の先輩方，発表の機会を与えてくださった数物セミナー執行部のみなさまに感謝申し上げます．