

御伽量子

京都大学農学部 3 回 東田京介

世に非可換幾何という分野がありますが、そうと一口に言えどもその範囲は非常に広く難解で、概観することもそう簡単ではない訳です。本講義では主に微分幾何学的な視点を中心に、そうした量子論の精神に深く刺激され生み出されたその数学たちのほんの一端でも撫でられないか試みようかと思えます。具体的な講義の内容としては、変形量子化及びその収束問題について、なるべく初等的に、具体的な計算を交えながらそこで起こる不思議な現象を紹介していきたいと思っています。

雰囲気を大事にしたいですので色々不正確な所はお許し頂きたい所なのですが、変形量子化とは、空間上の関数のなす可換環といういわば古典の対象から、 \hbar というパラメータで変形することで、Hilbert 空間上へと作用素表現される以前の非可換代数を得ることを言います。そこでそもそもその様なパラメータを導入しての変形が存在するのかが問題になります。ここで \hbar は本来は数なのですが、それへの数の代入など考えることなく不定元と仮定した場合、この仮定下での変形量子化を形式的変形量子化と呼びます。今考えている空間というのが symplectic mfd の場合には大森、前田、吉岡らの Weyl 多様体を構成することによって、より一般の Poisson mfd 上の場合には Kontsevich の homotopy 代数的手法によりその様な形式的変形量子化の存在性が示されています。

ところで物理理論としては \hbar は数として扱いたいものなので \hbar に代入をしたいのです。しかし形式的変形量子化においては \hbar の形式的巾級数を使って理論を展開します。よって数を代入した際この巾級数が収束するのがいつなのかが問題になる訳ですが、これが収束変形量子化というもので平常の代数に慣れているととても奇妙に見える現象を生み出すとても興味深いものなのです。結合律は常に成りつとは限りませんし左右で異なる逆元、零因子なども現れます。これらの奇妙な現象が大変自然に現れてくる様子を眺めるのが本講演の目標と言って差し支えないかと思えます。概要はこのくらいとして予備知識についてですが、量子という言葉や環という言葉でアナフィラキシー・ショックを起こさないくらいを想定したいと思いません。

参考文献

量子的な微分・積分・量子数理シリーズ 大森英樹

数学のなかの物理学—幾何学的量子論へむかって 大森英樹

一般力学系と場の幾何学 大森英樹

ポアソン代数と変形問題と非可換幾何 前田吉昭

幾何学の量子化～変形量子化からのアプローチ～ 前田吉昭 佐古彰史

弦理論と変形量子化 前田吉昭 梶浦宏成