ミルナーのエキゾチック 7 次元球面

飯田暢生

東京大学理学部物理学科 3 年

2017 年 1 月 15 日

1　アブストラクト

ミルナーは 1956 年の論文『On manifolds homeomorphic to the 7-sphere』において,「エキゾチック 7 次元球面」を構成した.「エキゾチック 7 次元球面」の発見は, 数学の幾何学, その中でも微分トポロジーとよばれる分野における革命的な出来事であった.

まず「エキゾチック 7 次元球面」とは何かを簡単に説明する. 可微分多様体 (以下, 多様体とよぶ) とは,$\mathbb{R}^n$ の断片を滑らかな座標変換で貼り合わせた構造をもつ位相空間のことである. 多様体は位相空間の一種であり,2 つの多様体が”同じである”という関係には, 同相 (位相空間として同じ) と微分同相 (多様体として同じ) という 2 つの関係が考えられる.2 つの多様体が互いに微分同相ならば同相であることは定義からすぐにわかるのだが, 同相ならば微分同相であるか, という問いは先のミルナーの論文が出される以前には謎であった.

「エキゾチック 7 次元球面」とは”普通の”7 次元球面と同相だが微分同相でない多様体のことである.「エキゾチック 7 次元球面」の発見は, 同相と微分同相の差を見いだしたという点で革命的な出来事であった.

今回の講演では, ミルナーの方法にしたがって「エキゾチック 7 次元球面」を構成し,”普通の”7 次元球面と同相だが微分同相でないことが如何にして証明されたかを紹介するつもりである。

議論のあらすじを述べる. やらなければならないことは以下の 3 つである.

1.「エキゾチック 7 次元球面」である 7 次元多様体を構成すること. これは,4 次元球面と 3 次元球面の”ねじれた積”(S^4 上の S^3 束) を作ることによってなされる. これは 4+3=7 次元多様体となる.”ねじりかた”を変えると複数の 7 次元多様体ができる. この中のいくつかが「エキゾチック 7 次元球面」となる.

2. 構成した「エキゾチック 7 次元球面」が”普通の”7 次元球面と同相であることを証明すること. ここでは「モース理論」のアイディアを用いて, 同相写像を作る.

3. 構成した「エキゾチック 7 次元球面」が”普通の”7 次元球面と微分同相でないことを証明すること. ここでは「特性類」を用いてミルナーの λ 不変量という微分同相不変量を作り, それによって微分同相類を区別する.

本講演では, 数学的厳密さには目をつぶり, 数学を専門としない方にも雰囲気が伝わるようにしようと思っている (発表者自身も数学科ではない) ので, 気軽に聞きに来ていただけたらと思う.