対称性から方程式を見てみよう！

東田京介

京都大学農学部地域環境工学科４年

2017 年 6 月 11 日

講演内容

世の中には２種類の方程式がある．解ける方程式とそうでない方程式だ．そして解けるものはそうでないものよりも遥かに少ない．

なぜなら５次よりも高次な方程式たちは一般には解の公式を持つとは限らないのだから... この小学２年生でも知っている有名な事実は１８世紀末に Ruffini が証明し，後にその欠陥を Abel が修正した．そして今日，Abel-Ruffini の定理の名で知られている．

しかし，かの Evariste Galois は後の数学及び物理に決定的な影響を与えてしまうことになる概念,”群”を導入することでこの定理に洗練された別証を与えた．彼は今日 Galois 対応と呼ばれる，体の Galois 拡大とその拡大の対称性を記述する Galois 群との間の一対一対応を構築し，そして方程式の可解性の問題を，対応する体拡大，更に Galois 群の可解性に結びつけて論じたのである．これがいわゆる Galois 理論と呼ばれるものの起こりである．人類が対称性の正体を数学的に取り扱うようになった，第一歩であった．

現代において Galois 的方法論は深く浸透しており，被覆空間とその上のデック変換群の間の Galois 対応や，これらをより一般化した圏論的枠組みで扱おうとする Galois 圏の理論などが有名である．今回のセミナーでは，この現代数学上非常に重要な Galois 理論の紹介を行う．

... と，思った？

今回のセミナーでは非線形波動であり，浅い水面波のモデルの一例として知られている KdV 方程式について考察する．つまり，非線形偏微分方程式である KdV 方程式がの解たちが，Fermionic Fock space への，あるアファイン Lie 環に対応する群 G の作用による真空の G 軌道を Boson-Fermion 対応で Bosonic Fock space へと写したもので尽くされている事を見，時間があればその解空間が見事な幾何的構造を持つことを可能な限り平易に紹介する．

参考文献

[1] 三輪哲二，伊達悦朗，神保道夫，『ソリトンの数理』

[2] 土屋 昭博 述，桑原 敏郎 記，『共形場理論入門』[*1]

[3] 神保道夫，『ホロノミック量子場』

[4] 高崎金久，『復刊 可積分系の世界』

[*1] http://mathsoc.jp/publication/SugakuMemoirs/sugaku-memoirs-04-1.pdf