論理と位相

今村悠希

京都大学理学部理学科３年

2017 年 6 月 11 日

はじめに

数学基礎論、あるいは数理論理学と聞いてどんな印象を抱くでしょうか。小難しい、近寄りがたい、普通の数学とは違う、など代数学や幾何学とは異なったイメージを持っているかもしれません。数理論理学とは数学の持つ論理構造を分析する分野で、数学の土台となる部分を調べていてその土台の上に成り立つ多くの分野とは別な分野という印象を抱いている人もいるかもしれません。しかし、実際には数理論理学も他分野と盛んな交流を行っていて、決して特別な分野ではなく歴とした数学全体の中の一領域なのです。今回はその一端を紹介したいと思います。後半はその中で現れた代数と幾何の交流をもう少し深めていきたいと思います。

講義内容

古典論理の一つ、命題論理においてコンパクト性定理という定理があります．ある論理式の集合について、その任意の有限部分集合が充足可能 (無矛盾) であるならばその集合は充足可能 (無矛盾) であるという定理ですが、その名の冠するようにこの定理は空間のコンパクト性を表しています。ではどんな空間がコンパクトであることを表しているのでしょうか。命題論理を代数化することでリンデンバウム代数を取り出せるのですが、これが命題論理における付値のなす位相空間と対応させることができ、実はこの位相空間の閉開集合のなすブール代数と同型になります。この同型を通じてコンパクト性定理のコンパクトさを確認していきます。

この対応はいったいどんなことを言っているのでしょうか。キーとなるのは代数と位相の対応であり、後半では論理を忘れてこの同型を一般的な形で調べ、任意のブール代数について類似の結果を導きます。実は代数における同型だけではなく、位相における双対的な同型も成立することがわかり、ストーンの表現定理と呼ばれます。これは圏論的な双対性の一つ

の現れとなっています。最後に、時間が余ればこの代数と位相の間の双対性を拡張することを目的に発展した pointless topology の結果の紹介と、その他雑談をして時間をつぶしたいと思います。

分野をまたいだ繋がりを中心に話すので、各分野の細かいところはあまり解説できないことをご了承ください。

参考文献

[1] 田中俊一,『位相と論理』, 日本評論社.

[2] M. F. Atiyah, I. G. MacDonald, 新妻弘 訳,『可換代数入門』, 共立出版.

[3] 檜山正幸, ブログ『檜山正幸のキマイラ飼育記』.
「古典論理は可換環論なんだよ」,「コンパクト空間と論理／モデル論」.