2018/6/24 数物セミナー談話会@京大

積分方程式の初歩の初歩

京都大学理学部
数理科学系 3 回 今川真城

積分方程式

積分方程式とは，未知函数の積分を含むような函数方程式である．その多くは函数解析の言葉で記述することができ一般論が適用できる．しかしながら，ここでは敢えて函数解析は使わずに積分方程式を初等的に扱うことを考える．それは，一つにはあまり予備知識を仮定したくなかったからであり，もう一つには一般論を学ぶ前に具体例を先に知っておくのも悪くないと思うからである．そのため，数学をよく知っている人にとっては退屈かもしれないが，ご承知おき願いたい．

内容

本講演では第二種 Fredholm 型積分方程式

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b k(x,s)\varphi(s)ds = f(x) \cdots (*)$$

を扱う．すなわち，$\lambda \in \mathbb{C}, a, b \in \mathbb{R}$ で，$f : [a,b] \to \mathbb{C}, k : [a,b]^2 \to \mathbb{C}$ は与えられた連続 (もしくは自乗可積分) な函数とし，(*) を満たすような連続 (もしくは自乗可積分な) 函数 $\varphi : [a,b] \to \mathbb{C}$ を求めることを考える．全体は 4 つの part に分かれており，Part1 では積分方程式そのものや他分野との関わりについて述べる予定である．Part2 では，高校数学にも登場する，分離核 (変数分離型) の場合を扱う (積分作用素 K が finite rank の場合である)．Part3 では，逐次近似により積分方程式が一意解を持つための条件を導き，そのときの解の表示を与える．Part4 では，(*) が一意解を持たない λ は高々可算であり $\mathbb{C}$ 上集積点を持たないことを時間の許す限り解説する．なお，Part4 で少し Fourier 級数を使うが，その他は 1 回生程度の微分積分学と線型代数学の知識があれば十分に理解できると思われる．

参考文献

[1] は Mikhlin による名著であり，講演のほとんどはこれに依拠している．和書としては [2] を挙げる．やや古い本ではあるが，シリーズ全体を通して物理の例や応用を取り入れながら体系的にまとめ上げた，優れた図書である．[3] は，主に Part1 の構成にあたり参考にした．

[1]S.G. Mikhlin, *Integral Equations,* Pergamon Press, 1964

[2] スミルノフ 『高等数学教程 (8) IV 巻 [第一分冊]』共立出版，1958

[3] ジョージ・アルフケン『特殊関数と積分方程式』講談社，1978