

班紹介

数物セミナー Advanced 8th

1 はじめに

本 pdf では, 数物セミナー合同合宿 Advanced 8th におけるリレーセミナー班 (以下, リレーセミナーを RS と呼称します) の候補となる分野を紹介します. 通常の合宿よりも発展的な内容を取り扱う都合上, 基礎的な事項は理解しているという前提の下で RS を行いますので, 合宿に参加される予定の方は本 pdf をお読みいただき, 分野の認識や RS に期待する内容の擦り合わせを行ってください.

2 参加申し込みについて

本合宿では, advanced 班 (班長付き班) と基礎班という形で難易度別に分かれて募集を行います. advanced 班では大学 4 年や修士課程以降に学ぶ数学や物理に関する RS を行い, 人数の関係で advanced 班が成立しない場合, 学び残した分野や一度もやったことのない分野などの基礎的な内容の RS を開講します. 以下, 応募する際の注意点になります.

1. advanced 班の応募欄には以下で紹介する班以外に, 「その他」という項目があります. やりたい班がなかったり, 班長に応募するほどではないがこういう分野がしたいという希望がある場合, 「その他」の欄に自由にご記入ください. また「その他」でどうしてもやりたい班がある場合は, 運営にご相談していただき, 自発的に友人や SNS などでも声掛けをしていただくと班が成立しやすくなります.
2. 基礎班は複数選択可能です. 大雑把に分野ごとで分けていますので, やりたい分野, 本などを具体的にご記入していただければと思います.

3 申し込み後の流れ

応募フォーム締め切り後, RS 班の人数調整のためにメールをお送りする場合があります. また締切の 2 週間後に本合宿の discord サーバーの招待リンクを添付したメールを送信いたしますので, お早めに discord サーバーへご参加ください. ご協力お願いいたします.

末筆になりますが, 皆様のご参加を心よりお待ちしております.

4 数学 Advanced 班 (班長付き班)

難易度は以下のように分けています：

- ★ ：学部程度の内容を前提知識としている.
- ★★ ：標準的な学部の内容を超えた分野などの多少の発展的な知識を要する.
- ★★★ ：発展的な内容. 前提知識を持たずに参加は難しい.

グラフ曲率

- 教科書：Y. Ollivier “Ricci curvature of Markov chains on metric spaces” (2009) など
- 難易度：★★ ~ ★★★
- 前提知識：リーマン幾何・確率論 (・最適輸送・確率微分方程式)
- 班長からのコメント：近年では離散的な空間に対する幾何解析が発展してきている. 特に, 最適輸送理論を用いた Ricci 曲率のグラフにおけるアナロジーである Ollivier–Ricci 曲率は非常によく研究されている. 今回のセミナーでは, 必要に応じて他の文献も参照しながら Ollivier の原論文を最後まで読むことを目指す. 班の立案者はグラフ曲率に関する良い教科書を知らないので, 原論文よりも良い文献があれば提案を歓迎する.

双有理幾何学

- 教科書：Lucian Bădescu “Algebraic Surface”
- 難易度：★★★
- 前提知識：スキーム論 (Hartshorne の chapter 3 程度まで)
- 班長からのコメント：双有理幾何学とは代数多様体を双有理同値によって分類 (= モジュライ空間の構成) をする学問で小平邦彦, 広中平祐, 森重文を始めとする多くの日本人数学者が活躍して来た分野でもあります. 3 次元以上での代数多様体の分類では特異点論, 極小モデル理論, 交差理論といった多くの道具が必要になり, 今現在でも未解決な部分が多数存在しています. 今回のセミナーでは上に挙げた双有理幾何学の “コア” となる概念の大元が現れてくる曲面 (2 次元) の場合の分類を学ぶ事で極小モデル理論を始めとする双有理幾何的手法への入門を果たすと同時にスキーム論を用いた議論について慣れ親しむ事を目的としています. また, 曲面の分類を学ぶに当たってこの本を選定した動機としては, 比較的最近書かれた本であり現代の潮流を踏まえた上で, 古典的な複素解析的手法もスキームの言葉で統一し, 正標数の場合も self-contained に解説されていて読みやすく書かれていると評判が良い為です.

CW 複体

- 教科書：Albert T. Lundell, Stephen Weingram “The Topology of CW Complexes”
- 難易度：★
- 前提知識：基本的な空間 (T^2 , Σ_2 , $\mathbb{R}P^2$ など) の特異ホモロジー群の計算をしたことがあればよいです.

- **班長からのコメント：**人が CW 複体を学ぶモチベって色々あると思うんですが、今回は「自力で CW 複体を扱えるようになって、その特異ホモロジー群まで計算できるようになる」という目標を立てておきます。教科書はだいたい 200p くらいありますので、恐らく事前に何度かゼミを行うことになると思います。

Mahler 測度とその周辺

- **教科書：**片桐宥氏『ソレノイドから定まるある力学系の p 進エントロピーと p 進 Mahler 測度』に関連する文献など。
- **難易度：**★★★
- **前提知識：** $(p$ 進)Mahler 測度を扱えること。加えて楕円曲線の L 関数 (BSD 予想, Beilinson 予想), p 進解析, 超幾何などの知識。
- **班長からのコメント：**広い意味で Mahler 測度に関する話題をオムニバス形式で学ぶ。文献に挙げた pdf で雰囲気がつかめる。関連する話題として, L 関数の特殊値との関係, Mahler 測度の高次元化, p 進 Mahler 測度, 超幾何との関係などがあり, これらに関連する話題を各々発表する。

モチーフ

- **教科書：**山崎隆雄『モチーフ理論』
- **難易度：**★★★
- **前提知識：**代数幾何の基礎
- **班長からのコメント：**純モチーフのパートを一通り読むのが目標です。(本では第 1 部のところ) 時間が限られているため, 適宜端折りながら進めていくつもりです。

渡辺 Bayes

- **教科書：**Mathematical Theory of Bayesian Statistics (あるいは “Algebraic Geometry and Statistical Learning Theory”)
- **難易度：**★★ ~ ★★★
- **前提知識：**(測度論的) 確率論, 正則モデルの統計的推測 (追加で, 情報量基準 AIC/BIC, 大偏差原理, 経験過程の基礎, 代数幾何の触りを知っているのが好ましいが, 事前ゼミやセミナー中に適宜補うつもりです)。
- **班長からのコメント：**高次元統計で現れる特異モデルでは, 事後分布がガウス近似できず, BIC など従来の漸近理論が破綻するという問題があります。渡辺の理論は, こうした特異性を代数幾何の手法で解析し, 尤度の谷の “潰れ方” や “分岐” をモノミアル化して, その指数から一般化誤差や自由エネルギーの漸近形を決める方法を与えます。つまり, 学習の複雑度を「特異点の次数」として評価できるようにし, 正則・非正則を一元的に扱えるのが特徴です。

差分方程式

- 教科書：広田良吾『SGC 8 差分方程式講義 —連続より離散へ—』
- 難易度：★
- 前提知識：微積と学部で学んだ常微分方程式
- 班長からのコメント：この本では基本的な関数の差分化をしたあと、微分方程式の差分化をします。読む本については「差分と超離散」とも迷ったのですが、合宿で読むには SGC がちょうどいいかなと思います。班長も差分方程式について初学なので一緒に勉強しましょう。

非可換幾何

- 教科書：主にオムニバス形式で行う。広義の非可換幾何に関連することをそれぞれの興味に応じ発表します。キーワードとして非可換幾何/作用素環/粗幾何/指数理論/離散群論などがあります。例えば、
 - Yu “Localization algebras and the coarse Baum-Connes conjecture”
 - Baum-Higson-Schick “On the Equivalence of Geometric and Analytic K-Homology”
 - Debord-Lescure “Index theory and Groupoids”
 - Mishchenko-Fomenko “The index of elliptic operators over C^* -algebras”
 - G. G. Kasparov “Equivariant KK -theory and the Novikov conjecture”等がありますがこういったことに限るというわけではないです。
- 難易度：★★ ~ ★★★
- 前提知識：オムニバスなので特にないですが、しいて言えば作用素環の非常に基本的なことが分かっていたほうがほかの人の発表が聞きやすいかもしれません。必須ではないです。
- 班長からのコメント：広い分野の人が来てそれぞれの刺激になるといいと思います。上であげたのは私の興味に寄ってしまっているのであまり気にしないでください。

特異点

- 教科書：松澤淳一『特異点とルート系』
- 難易度：★ ~ ★★
- 前提知識：群や環などの代数の基本事項と、多様体についての基礎知識
- 班長からのコメント：クライン型特異点を中心に正多面体群、リー環、ルート系などの対象が結びついていく様子を概観します。A 型に絞った具体的な計算によって読み進めたいと思っていますが、参加者と相談して決めたいと思います。班長は表現論専攻ですが、この話題については何も知らないので気軽に参加していただけると嬉しいです。

スピン幾何

- 教科書：本間泰史『スピン幾何学』
- 難易度：★ ~ ★★

- **前提知識**：多様体, リー群, 表現論の基礎
- **班長からのコメント**：スピン幾何学の基礎と, 他のさまざまな幾何学とのかかわりを解説した入門書です. スピノール場やディラック作用素に対する理解が深められたらいいなと思っています.

作用素環論 (1)

- **教科書**：戸松 玲治『作用素環論入門』共立出版, 2024.
- **難易度**：★ ~ ★★
- **前提知識**：初歩的な函数解析
- **班長からのコメント**：Hilbert 空間上の有界線形作用素は, 共役演算を備えることで非可換環としての構造をもつことが知られている. 作用素環論は, この非可換環を解析する分野であり, その理論は数理物理をはじめ多岐にわたる分野に応用される. ここでは, 応用面には立ち入らず, 作用素環論の数学的基礎の理解を目的とする.

作用素環論 (2)

- **教科書**：Alfsen-Shultz “Geometry of State Spaces of Operator Algebras”
- **難易度**：★★
- **前提知識**：関数解析
- **班長からのコメント**：自己共役作用素のなす代数の一般化として, 実ベクトル空間上に対称化積 $(xy + yx)/2$ の抽象化であるような非結合的な積が入った構造である Jordan algebra について学びます. これは, 物理学的には量子論における物理量のなす代数を抽象化したものでもあります.

condensed math

- **教科書**：Peter Scholze “Lectures on Condensed Mathematics” (2019), Qi Zhu “Fractured Structure on Condensed Anima” (2023), など有名な condensed math の教科書であればなんでも良いと思っています. 他にいい案があれば相談した上で採用したいです.
- **難易度**：★★★
- **前提知識**：コホモロジー論含むスキーム論 (ハーツホーンの 3 章までの知識), 導来圏の知識, (無限圏の知識や topos の知識があるとより理解できると思います)
- **班長からのコメント**：位相を備えた代数系を考えたい場合, 例えば数論幾何における絶対ガロア群 $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ などを考えたい場合などが挙げられます. しかし, 位相アーベル群全体はアーベル圏ではなく, ホモロジー代数を行うことが不可能です. ホモロジー代数を行うには位相を忘却する必要がありますが, 絶対ガロア群は profinite であり, その位相を忘れてしまうと, 中間体と閉部分群の対応などが壊れてしまったり, ガロア表現に病的な群準同型が存在してしまったり, と様々な課題が挙げられます. この位相と代数を両立させた圏を構成したいというのがこの condensed math の動機となっています. 現在では, 数論幾何をはじめとし, D 加群や表現論など様々な分野での応用が期待され研究されています.

岩澤理論

- **教科書**：Washington “Introduction to Cyclotomic fields”, 福田隆重点『重点解説岩澤理論』, 落合理『岩澤理論とその展望 上』等です.
- **難易度**：★★★
- **前提知識**：代数的整数論 (デデキント環, 類数, 判別式, 単数, 分岐理論, 局所体に馴染んでいるのが望ましい. 類体論も必要だが, Washington の Appendix や福田の 3 章などを適宜参照すれば問題ないと思われる.)
- **班長からのコメント**： p 進 L 関数, 岩澤加群といった岩澤理論の概念の理解を深めることを目的とする. 発表形式については班が決まってから話し合うことにする. 場合によっては, 古典岩澤理論に拘ることなく学ぶ.

幾何解析

- **教科書**：『山辺の問題 (数学メモアール)』もしくは, Aubin “Some non-linear problems in Riemannian Geometry” の Yamabe Problem の章 (応相談)
- **難易度**：★★ ~ ★★★
- **前提知識**：基本的な可微分多様体論は仮定します. リーマン多様体にも親しみがあると良いです (いろいろとソボレフ空間論が要求される部分がありますが, 使えれば, 証明まで込めて理解している必要はありません).
- **班長からのコメント**：山辺の問題は証明方法, その内容の豊かさ及び応用の豊富さどれをとっても現代幾何解析学の花形と言って良い話題ですが, あまり人口に膾炙していないような印象を受けます. 一緒に山辺の問題を通じて, 幾何解析の真髄の一端に触れましょう.

幾何学的表現論

- **教科書**：庄司俊明『代数群の幾何学的表現論 I —代数群のシュプリンガー対応と指標層—』
- **難易度**：★★★
- **前提知識**：本書 1 章と付録 (の途中まで) です. 偏屈層について知っていることが望ましいですが, 層の理論よりも代数群の理論に親しいことの方が重要だと思われます. 書名を挙げるならば堀田『線形代数群の基礎』あたりが分かっていると良いと思います.
- **班長からのコメント**：代数群のシュプリンガー対応について書かれている本です. 班員の知識に応じて何章を読むか決めますが, おそらく 2, 3 章をやることになるでしょう.

幾何学的モデル理論

- **教科書**：Anand Pillay “Geometric stability theory” Oxford Logic Guides 32
- **難易度**：★★★
- **前提知識**：体のモデル理論及び安定性理論, 代数多様体に対する基本的な知識. Marker, Model Theory

an introduction や Tent–Ziegler, A Course in Model Theory などを読んでいると望ましい。

- **班長からのコメント**：Pillay の本は具体例に乏しく、理解するのが難しいため、他の文献などを参照しながら、代数閉体などの古典的な場合の具体例を計算しつつ読み進めたいです。

スピン幾何学とゲージ理論

- **教科書**：Salamon–Zürich “Spin geometry and Seiberg–Witten invariants” の 2, 3 章
<https://people.math.ethz.ch/~salamon/PREPRINTS/witsei.pdf>
- **難易度**：★★★
- **前提知識**：微分幾何学の基礎事項, Lie 群の基礎事項, 代数トポロジーの基礎事項
- **班長からのコメント**：スピン幾何学から始めて Seiberg–Witten 不変量を目指そうという趣旨で考えています。1 章に関しては基本飛ばして必要に応じてやる予定です。Atiyar–Singer の指数定理の証明 (熱核の方法や K 理論によるものなど) は深く立ち入らない予定です。また Seiberg–Witten 理論という場合、物理側の理論もありますが今回は幾何学の方を指しています。

5 物理 Advanced 班 (班長付き班)

難易度は以下のように分けています：

- ★ ：学部程度の内容を前提知識としている.
- ★★ ：場の量子論の基礎など多少の発展的な知識を要する.
- ★★★ ：発展的な内容. 前提知識を持たずに参加は難しい.

超弦理論

- 教科書：畑『入門 弦理論』, 今村『SGC ライブラリ 80 超弦理論の基礎』, David McMahon『弦理論』など
- 難易度：★★
- 前提知識：場の理論の基礎に触れていると良い.
- 班長からのコメント：超弦理論は無矛盾な量子重力理論となることから「万物の理論」の候補として研究されている. さらに双対性という異なる理論の間の様々な対応関係から他分野との繋がりも発展してきた. この班では無矛盾性から特定の時空次元への制限が現れることや, T 双対性の実際の対応などを目標として弦理論の入門を学ぶ.

JT 重力とホログラフィ

- 教科書：宇賀神『SGC ライブラリ 205 創発するブラックホール』の内容を主軸に RS を行います. 必要に応じて周辺知識に関する論文を読みます.
- 難易度：★★★
- 前提知識：
 - 場の量子論の基礎 — 共形場理論の計算に慣れていると読みやすいと思われます.
 - 一般相対論の基礎
- 班長からのコメント：Hawking 放射のエンタングルメントエントロピーやアイランド公式など, BH の量子的性質への理解を中心とした近年の量子重力の展開について概観します. 班長は計算可能なホログラフィ理論としての JT 重力に興味がありますが, 具体的にどこを重点的に読むか・どこを目的とするかなどは参加者との協議の上決めようと思います.

開放系の量子力学

- 教科書：羽多野・井村『非エルミート量子力学』, 沙川・上田『量子測定と量子制御』
- 難易度：★
- 前提知識：学部程度の量子力学
- 班長からのコメント：外部との相互作用を取り入れた量子力学です. 応用範囲は崩壊現象, 散乱, 量子制御, トポロジカル絶縁体など, 素粒子論から物性理論まで幅広くあります. 学ぶために必要な前提知識も

比較的少なく、学部の物理との接続がスムーズです。有名な教科書として2冊挙げましたが、班員の皆さんの興味に合わせてRSの内容は柔軟に決めていきたいと思います。

凝縮系の場の量子論

- 教科書：田島裕之『凝縮系における場の量子論』
- 難易度：★★
- 前提知識：学部程度の統計力学、場の量子論の基礎
- 班長からのコメント：相互作用の強い量子多体系を記述する手法を学びます。事前ゼミ・事後ゼミも合わせて、6章のBCS-BECクロスオーバーあたりまで進むことができれば嬉しいです。ファインマン・ダイアグラムを使いこなしたい方は是非一緒に勉強しましょう！

非線形レオロジー

- 教科書：早川尚男, 高田智史『非線形レオロジー』
- 難易度：★～★★
- 前提知識：統計力学, 連続体力学
- 班長からのコメント：粉体を扱います。ソフトマターを広くやりたい方も、粉体に興味がある方も歓迎します。

地球流体力学

- 教科書：総観気象学 理論編 https://www.jma.go.jp/jma/kishou/known/expert/pdf/textbook_synop_theory_20220318.pdf
- 難易度：★
- 前提知識：微積分、ベクトル解析など
- 班長からのコメント：PDFを最初の方から読んでいく予定です。初学者・学部生歓迎です。

Lie 群・Lie 代数

- 教科書：窪田『SGC ライブラリ 66 物理のためのリー群・リー代数』
- 難易度：★
- 前提知識：ほぼなし (微積分さえ出来れば良いと思われる/ベクトル解析も知っていると良い)
- 班長からのコメント：物理学の中に現れる代数構造の一つとして、Lie 群と Lie 代数について勉強します。物理の文脈の中で勉強するので、数学的なアプローチとはかなり異なります。例えば、Lie 群と Lie 代数の議論は多様体を定義してから為されるのが数学的な流れですが、この本では多様体はそれほど表には出てきません。むしろ、Lie 群と Lie 代数を用いて物理がどう表現されるのかに注目しています。

6 基礎班 (班長なし班)

基礎班は複数選択可能です。大雑把に分野ごとで分けていますので、やりたい分野、本などを具体的にご記入していただければと思います。

数学

- 代数学 (可換環論・ホモロジー代数学・表現論、圏論など)
- 幾何学 (一般位相幾何学、代数的位相幾何、微分幾何、ホモトピー論など)
- 解析学 (関数解析学、偏微分方程式論、測度論、超関数論など)

物理

- 素粒子・原子核・宇宙 (素粒子, 原子核, ハドロン, 重力理論, 宇宙物理学など)
- 物性物理 (凝縮系固体物理, 統計物理学, 量子情報理論など)
- 学際 (数理物理学, 化学物理学, 地球惑星物理学など)